Serie EXplora

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS I

J.Manuel Ruiz

BlueBooks & Magnus

NEM

MCCEMS

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS 1

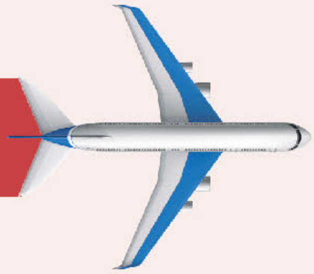
Dirección Editorial:	BB&M Academic
Diseño Gráfico:	Jacobo González
Diseño de Portada:	Montserrat Rosillo
Maquetación:	Karen González
Revisión Técnica:	Ileana Daniela Rodríguez Oropeza
Dirección de Producción:	Ricardo Cruz Flores
Autor:	J.Manuel Ruiz
Derechos de autor:	Bluebooks & Magnus S.A. de C.V.
Edición:	Ileana Oropeza Rosas
Imágenes:	Dreamstime
ISBN:	978-607-26888-0-3

55 4957 0102

contacto@bluebooksandmagnus.com
www.bluebooksandmagnus.com
ventas@bluebooks.com.mx

1a edición
Impreso en México / Printed in México
Se terminó la impresión de esta obra en 2024
En los talleres de Fortaleza Gráfica S.A. de C.V.
Amado Nervo Mza. 11 Lte. 43, Col. Palmitas,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09670 Ciudad de México.

Contenido/Progresiones



Introducción

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS 1

El pensamiento matemático busca que los estudiantes de bachillerato logren comprender mejor otras áreas de conocimiento y apliquen estas habilidades en la toma de decisiones razonadas. Se busca que valoren la matemática por su belleza, utilidad y como un factor fundamental en la creación de su proyecto de vida. De este modo, se orientará al estudiantado del nivel medio superior a desarrollar procesos de razonamiento tanto lógicos como intuitivos, fomentando la creatividad, la imaginación, la curiosidad y la reflexión para promover el aprendizaje permanente.

En Temas Selectos de Matemáticas I, se busca profundizar en conceptos geométricos y trigonométricos que estimulen el desarrollo del pensamiento matemático mediante el entendimiento y la modelación matemática del entorno del estudiante.

Las anotaciones didácticas están diseñadas para deducir el enfoque adecuado que permita trabajar la estructura, el orden y las relaciones. Se profundiza en conceptos formales utilizados en el recurso sociocognitivo de pensamiento matemático. Se consideran particularmente elementos de geometría euclidiana, trigonometría y geometría analítica.

Temas Selectos de Matemáticas I inicia con el estudio de conceptos fundamentales de geometría euclidiana, específicamente nociones como el ángulo, la semejanza y la congruencia, además de las relaciones asociadas, como las razones trigonométricas. Posteriormente, se revisan las leyes de senos y cosenos, el inverso del Teorema de Pitágoras, y se abordan los axiomas de Euclides, incluyendo un análisis de algunas geometrías no euclidianas y sus propiedades.

Se presenta y se realiza un estudio detallado de las secciones cónicas desde la perspectiva de la geometría analítica y sus aplicaciones, con énfasis en la parábola, la circunferencia y la elipse, lo que fortalece las técnicas geométrico-algebraicas. Finalmente, se exploran los fractales, analizando ejemplos representativos y revisando sus propiedades principales.

Este recurso combina distintas actividades que van desde realizar operaciones y seguir pasos o métodos hasta desarrollar ideas más abstractas. Procesos que ocurren cuando el estudiante se involucra en el aprendizaje matemático al resolver problemas, crear o usar modelos, proponer ideas y argumentos, y expresar sus pensamientos de manera clara y estructurada.

Esperamos que este libro no solo les sea de gran utilidad en su formación académica, sino que también les permita disfrutar del fascinante mundo de las matemáticas. Que cada página les inspire a descubrir nuevas perspectivas, a resolver problemas con creatividad y a apreciar la belleza de esta disciplina.

¡Mucho éxito en su aprendizaje y que esta experiencia sea enriquecedora para su desarrollo personal y académico!

8 Principios de la Nueva Escuela Mexicana

NEM
MCCEMS

Fomentar la identidad con México

1

Fortalecer el amor a la patria, el aprecio de la cultura, historia y valores de nuestro país, respetando la diversidad cultural y de pensamiento.

Responsabilidad ciudadana

2

Impulsar el uso de valores y de los derechos humanos en pro del desarrollo del individuo y de la comunidad.

Honestidad

3

Enfatizar este valor para desarrollar la confianza y la congruencia dentro de la comunidad.

Participación en la transformación de la sociedad

4

Trabajar de manera conjunta con los miembros de la comunidad y no solo de manera individual para la resolución de problemas comunes.

Respeto a la dignidad humana

5

Respetar, ejercer y promover los derechos humanos.

Interculturalidad

6

Fomentar el reconocimiento, respeto y aprecio por la diversidad cultural y lingüística que existe en nuestro país.

Cultura de la paz

7

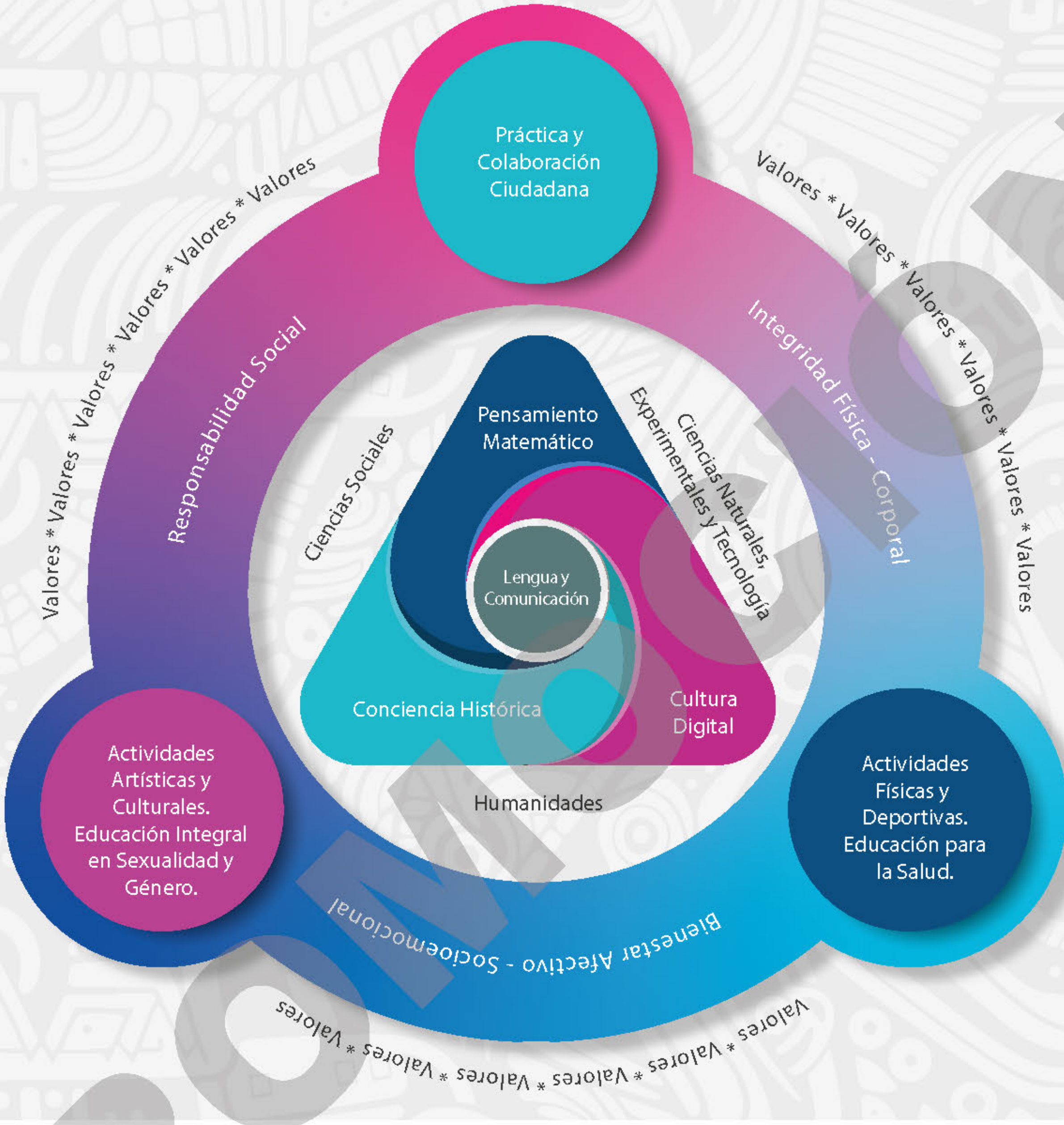
Favorecer la resolución de conflictos mediante el diálogo constructivo que deriven en acuerdos y no a través de la violencia. Promover la solidaridad y la búsqueda de una sociedad pacífica con desarrollo sostenible, inclusiva y con igualdad de oportunidades.

Respeto a la naturaleza

8

Incentivar la conciencia, el conocimiento, la protección y conservación del entorno.

Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS)



Currículum Fundamental

Recursos Sociocognitivos:

- Lengua y comunicación
- Pensamiento matemático
- Conciencia histórica
- Cultura digital

Áreas de Conocimiento:

- Ciencias naturales, experimentales y tecnología
- Ciencias sociales
- Humanidades

Currículum Ampliado

Recursos Socioemocionales

- Responsabilidad social
- Cuidado físico corporal
- Bienestar emocional afectivo

Ámbitos de la Formación Socioemocional

- Práctica y colaboración ciudadana
- Educación integral en sexualidad y género
- Actividades físicas y deportivas
- Actividades artísticas y culturales
- Educación para la salud

Categorías, subcategorías, conceptos centrales y transversales

Metas de aprendizaje

Aprendizajes de trayectoria – Perfil de ingreso y egreso

Serie EXplora

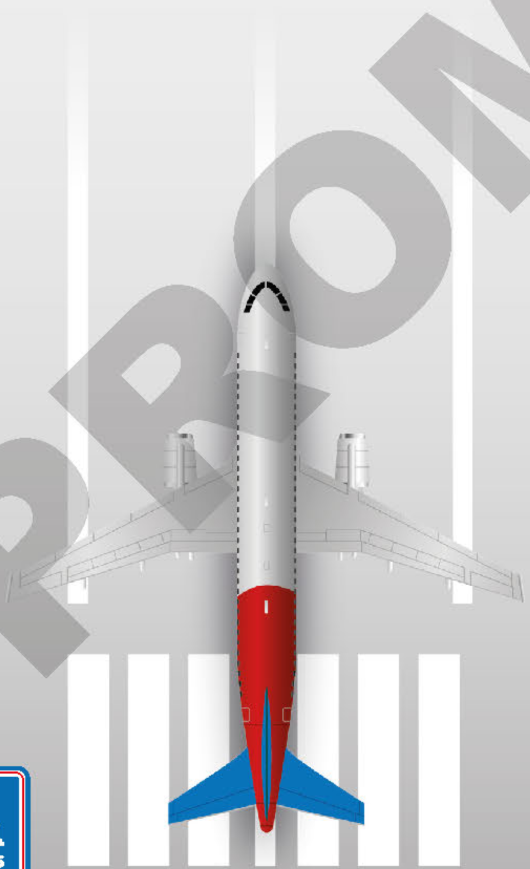
¡Bienvenidos a bordo a nuestra experiencia de aprendizaje!

En esta emocionante travesía, hemos diseñado una secuencia didáctica que equipara el proceso de enseñanza-aprendizaje con un viaje inolvidable. Al igual que en cualquier paseo, nuestro recorrido educativo consta de tres momentos fundamentales:

La fase de inicio "ABORDAJE"

La fase de desarrollo "TRAYECTORIA"

La fase de cierre "ATERRIZAJE"



PASAPORTE APRENDIZAJE

MOMENTO 1

ABORDAJE
(INICIO)

Es la sección en la que nos alistamos para comenzar nuestro viaje educativo. Identificamos la progresión y comprendemos sus componentes.

Equipaje de mano

- Metas
- Categorías
- Subcategorías

Las 5E representan cinco fases clave en el proceso de aprendizaje.

Enganchar

Activa tus conocimientos con las preguntas detonadoras, imágenes, videos o lecturas que tu libro te ofrece, te brindarán la oportunidad de comprender de una manera única los temas y actividades que vas a realizar.

PASAPORTE DEL APRENDIZAJE

MOMENTO 2 TRAYECTORIA (DESARROLLO)

Aquí nos profundizamos en el corazón de la enseñanza y el aprendizaje. Esta fase es el núcleo de nuestro recorrido educativo, donde exploramos conceptos, practicamos habilidades y nos sumergimos en el conocimiento.

Explorar

Mediante diversas actividades, cuestionamientos, experimentos, observaciones e investigaciones, tendrás la oportunidad de participar activamente en las situaciones que están diseñadas para tu aprendizaje.

Explicar

Presta atención a las bases teóricas que te serán proporcionadas, así podrás identificar con mayor facilidad la información relevante y los conceptos clave de los contenidos de las progresiones.

Elaborar

Aplica tus conocimientos y habilidades adquiridas elaborando diversos instrumentos y actividades, los cuales te permitirán profundizar y comprender mejor los temas que se abordarán.

MOMENTO 3 ATERRIZAJE (CIERRE)

Es el momento de finalizar nuestro paseo educativo y asegurarnos de que todos los aprendizajes se consoliden. Aquí reflexionamos sobre lo aprendido, evaluamos nuestro progreso y nos preparamos para futuras aventuras educativas.

Evaluar

El momento de poner aprueba tus conocimientos ha llegado, involúcrate activamente en el proceso de evaluación, apoyándote de los instrumentos que se encuentran al final de cada progresión y demuestra lo aprendido.

Recursos Educativos

- ¿SABÍAS QUÉ?...
- MOMENTO DE REFLEXIÓN
- TEMA INTEGRADOR
- TRANSVERSALIDAD

Recursos Socioemocionales

- CUIDADO FÍSICO CORPORAL
- BIENESTAR EMOCIONAL AFECTIVO
- RESPONSABILIDAD SOCIAL

Ámbitos de la Formación Socioemocional

- PRÁCTICA Y COLABORACIÓN CIUDADANA
- EDUCACIÓN INTEGRAL EN SEXUALIDAD Y GÉNERO
- ACTIVIDADES FÍSICAS Y DEPORTIVAS
- ACTIVIDADES ARTÍSTICAS Y CULTURALES
- EDUCACIÓN PARA LA SALUD

Unidad 1 GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

Progresión 1 Fundamentos de Geometría y Trigonometría

Resuelve situaciones-problema contextualizadas, a través de la exploración y desarrollo de elementos básicos de la geometría y trigonometría, tales como, ángulos, semejanza, congruencia y autosemejanza, observando la relación entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo como razones trigonométricas, destacando la importancia de entes abstractos en la vinculación con otras Unidades de Aprendizaje Curricular, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas.

Progresión 2 Leyes y relaciones matemáticas

Explora algunas leyes y relaciones matemáticas que permitan dar solución a problemas cotidianos a través de la geometría y trigonometría, considera el recíproco del Teorema de Pitágoras, la Ley de Senos, la Ley de Cosenos como una generalización del Teorema de Pitágoras, la circunferencia unitaria, explorando razonamientos y demostraciones sencillas facilitando la formalización de los conceptos.

Progresión 3 Geometría euclidiana y no euclidiana

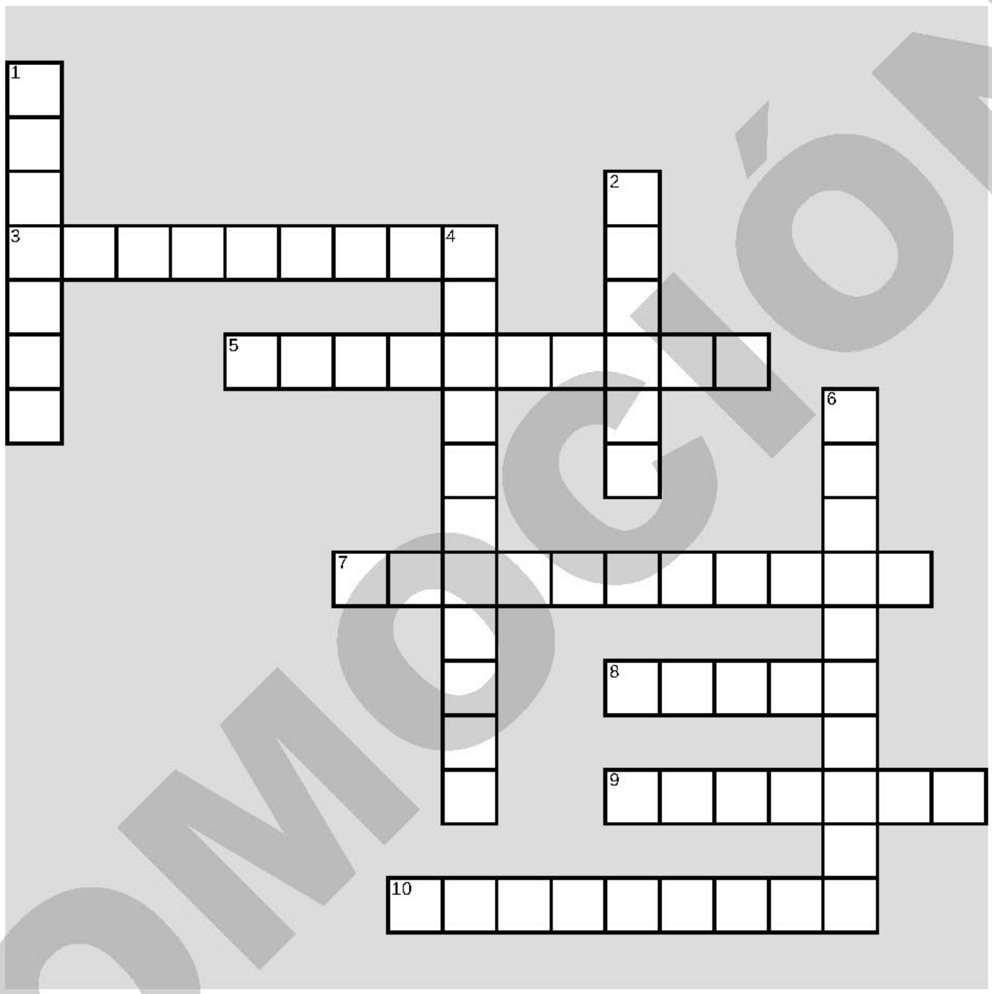
Examina el planteamiento de la Geometría Euclidiana, a través del desarrollo histórico de los postulados de Euclides, particularmente "el quinto postulado de Euclides" y considera escenarios donde no se cumple el mismo, analizando las diferencias entre la Geometría Euclidiana y no Euclidianas considerando ejemplos reales como el modelo terráqueo de la tierra, los viajes aeronáuticos y el estudio de la astronomía, lo cual permita observar cómo estas han sido de utilidad en la solución de problemas reales.

Equipaje de mano

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. (P1, P2)	**C1.** Procedural. (P1, P2, P3)	**S1.** Elementos aritméticoalgebraicos. (P1, P2)
C1M2. Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. (P1, P2, P3)	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento. (P1, P2, P3))	**S2.** Elementos geométricos (P1, P2, P3)
C1M3. Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares. (P1, P2)	**C3.** Solución de problemas y modelación. (P1, P2)	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar (P1, P2)
C2M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación. (P2, P3)		**S2.** Pensamiento intuitivo (P2)
C2M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto. (P2)		**S3.** Pensamiento formal (P2)
C3M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto. (P2)		**S1.** Uso de modelos. (P2)
C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno. (P1, P2)		**S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios (P1, P2)
C3M4. Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático. (P1)		

Evaluación diagnóstica

A. Para iniciar este vuelo, es necesario que respondas el siguiente crucigrama. Algunos términos te resultaran familiares otros no; trata de contestar el mayor número de cuestionamientos. Sabemos que lo lograrás, éxito.



Horizontales

3. Figura geométrica formada por tres rectas que se cortan de dos en dos y que forman entre sí tres ángulos.
5. Lado de mayor tamaño en un triángulo rectángulo.

7. Figuras geométricas que tienen la misma forma e igual tamaño.

8. Elemento que surge de la unión de dos puntos.

9. Lados de un triángulo que forman un ángulo recto.

10. Filósofo y matemático griego que formuló principios que contribuyeron al desarrollo de las matemáticas, geometría y atritmética.

Verticales

1. Punto en el que concurren dos lados de un ángulo.

2. Figura geométrica formada por dos líneas planas que concurren en un punto.

4. Triángulo que tiene dos ángulos agudos y uno mayor a 90 °.

6. Figuras geométricas que tienen la misma forma pero diferente tamaño.

Progresión de aprendizaje **1**

Fundamentos de geometría y trigonometría

Equipaje de mano

Metas
M3.1, M1.2
Categorías
C1, C2
Subcategorías
S2.1, S1.2

ABORDAJE (INICIO)

En esta progresión, te convertirás en un explorador matemático encargado de salvar el "Reino Geométrico". Resolverás desafíos para restaurar el equilibrio del reino, midiendo sombras, descifrando ángulos. ¿Aceptas la misión?

A. Con un compañero reflexionen en la siguiente pregunta y contesten conforme a lo que saben.

1. ¿Por qué crees que el número 60 es importante para medir el tiempo o los ángulos?

Origen del sistema sexagecimal

Te has preguntado ¿por qué los relojes tienen como base un sistema de 60 unidades? O ¿por qué usamos el sistema sexagecimal para medir ángulos?

Ambas respuestas tienen su origen en la Antigüedad. Los habitantes del llamado Creciente Fértil, a una región histórica que se corresponde con parte de los territorios del Levante mediterráneo y Mesopotamia, idearon una manera de enumerar usando los dedos de las manos. Contaban señalando con el dedo pulgar de la mano cada una de las 3 falanges de los cuatro dedos restantes de la misma mano. Con este método se puede contar hasta 12.

Para seguir con cifras mayores, cada vez que se completa un grupo de 12 se levanta un dedo de la mano libre, hasta completar 60 unidades (12 falanges x 5 dedos = 60), por lo que este número fue considerado una «cifra redonda», convirtiéndose en una referencia habitual en transacciones y medidas. Una suerte similar corrió el número contado con la primera mano, el 12, y algunos de sus múltiplos, como en las 24 horas en que se divide el día, o la circunferencia con sus 360 grados.

B. Responde la siguiente pregunta referente al texto.

1. ¿Por qué usamos el sistema sexagesimal para medir ángulos y organizar el tiempo?

TRAYECTORIA (DESARROLLO)

Actividad de aprendizaje

C. Analiza y resuelve los siguientes problemas

1. Toma dos lápices o plumas y coloca uno sobre el otro por la mitad, ahora ve girando el lápiz de arriba. Nota como se forman dos pares de ángulos iguales. ¿Cómo se llaman las relaciones que forman estos ángulos y cuál es su característica?

2. Ahora toma un tercer lápiz y ponlo paralelo al lápiz de abajo, nuevamente coloca un lápiz que pase por encima de los lápices que están paralelos. ¿Qué nuevas relaciones encuentras entre los ocho ángulos que se forman?

3. Se quiere saber la altura de un aerogenerador de la base a la góndola, sin embargo, no es posible medir directamente su altura. A determinada hora del día el aerogenerador proyecta una sombra de 60 metros y un poste que está a su lado una sombra de 80 cm. Se sabe que la altura del poste es de 2 metros.

¿Es posible saber la altura de aerogenerador con los datos proporcionados?
¿Qué formula usarías para saber la altura del aerogenerador?

4. Ilustra tu respuesta con un esquema

5. ¿Qué principio de la geometría explica este fenómeno?

Actividad fuera del áula

6. Usen una cinta métrica, regla o flexómetro, para calcular mediante las sombras que proyectan en el piso, la altura de elementos de tu entorno. Pueden ser postes, bardas, edificios u otros compañeros.

   En el siguiente cuadro ilustra tus mediciones y resultados.

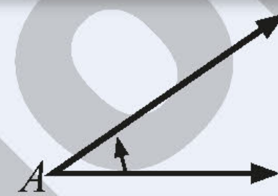
Ángulos

Un ángulo es la figura formada de la unión de dos líneas sermirectas, llamadas lados, que se unen en uno de sus extremos para formar un punto, el cual se denomina vértice.

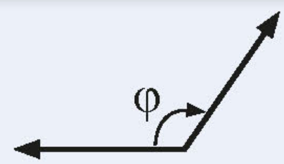
Como si se tratara de las manecillas de un reloj, una forma de medir la apertura de los lados es por medio del sistema sexagecimal, en el cual una vuelta completa de un lado respecto al otro, equivale a 360 grados.

Para designar un ángulo podemos usar tres sistemas:

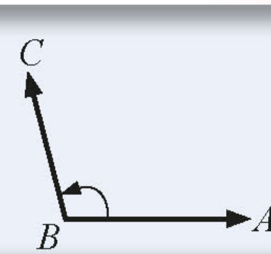
1. Colocar una letra mayúscula por fuera del ángulo, próximo al vértice donde se unen las dos rectas.



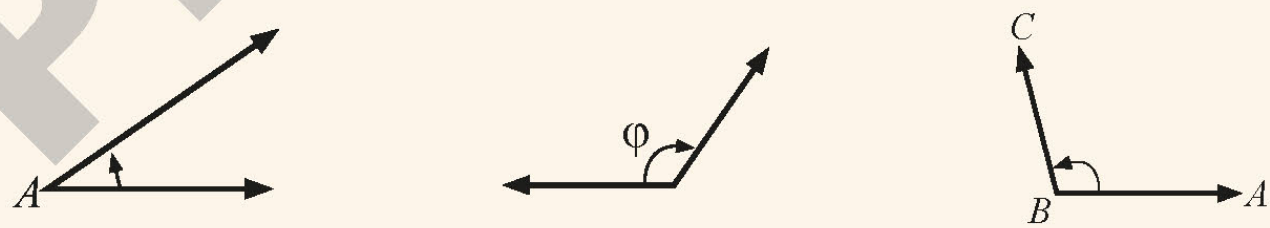
2. Colocar una letra griega dentro del ángulo.



3. Con tres letras mayúsculas, una en cada extremo de los lados, dónde la letra de en medio coincida con el vértice del ángulo que queremos designar.



Dentro de un texto podemos utilizar el símbolo ∧ y se coloca sobre la letra o letras que designan el ángulo. Otra opción es anteponer el símbolo ∠ a la letra que designa el ángulo.



Elaborar

5E

Actividad de aprendizaje

D. Investiga y dibuja las siguientes formas de clasificar un ángulo:

1. Por su medida:

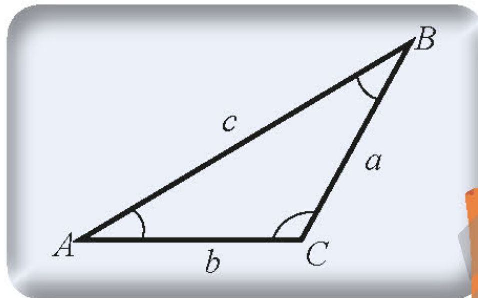
2. Por su posición:

3. Por la suma de su amplitud:

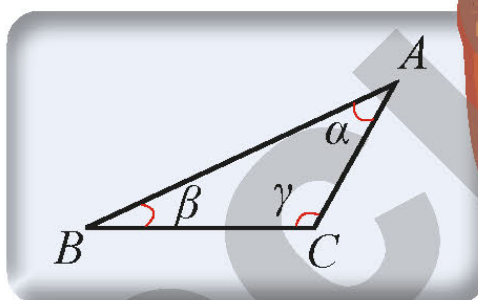
Triángulo

Es la primer figura geométrica cerrada que podemos formar con tres rectas que se unen por sus extremos y forman tres ángulos.

Para designar las partes de un triángulo se emplea un modo similar al de un ángulo, con una letra mayúscula próxima a los vértices y se emplea una letra minúscula para designar el lado opuesto correspondiente.



También podemos designar sus ángulos cuando están como incógnita por medio de letras griegas. Siendo las más comunes alfa, beta, gamma, theta...



Actividad de aprendizaje

E. **Investiga y dibuja la clasificación de los triángulos por la medida de sus lados y por la medida de sus ángulos.**

Por la medida de los lados	Por la medida de los ángulos

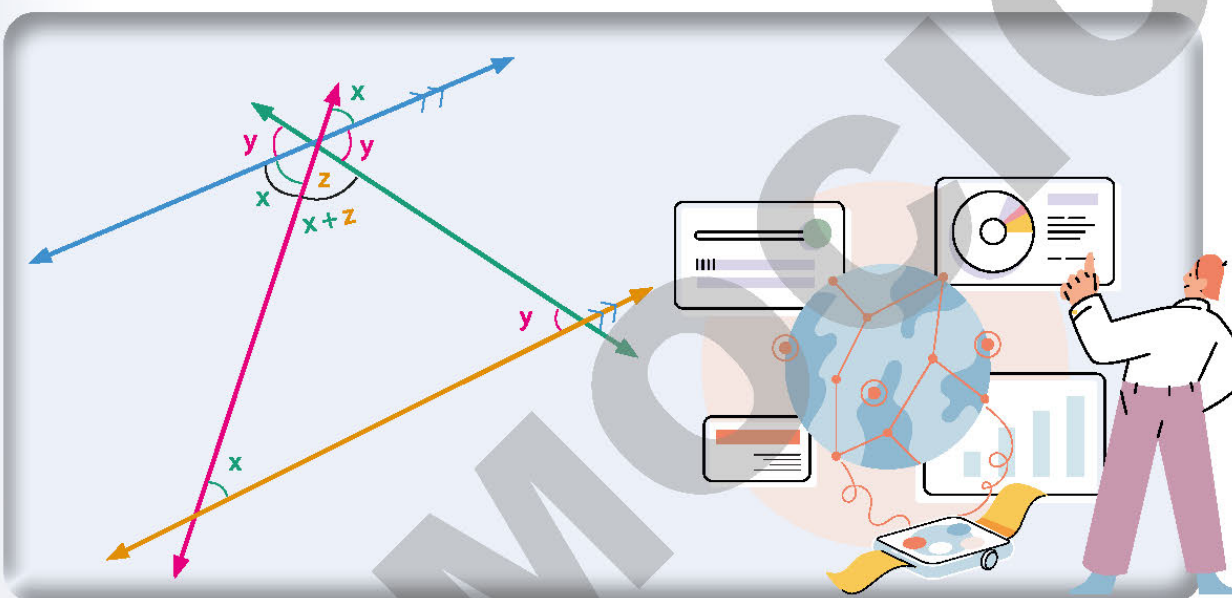
El triángulo como base

Los triángulos son el primer polígono que existe por número de lados dentro de la geometría plana. A su vez, los demás polígonos se pueden dividir en triángulos, es por ésto que el estudio de los triángulos nos sirve de base para analizar las demás figuras geométricas.

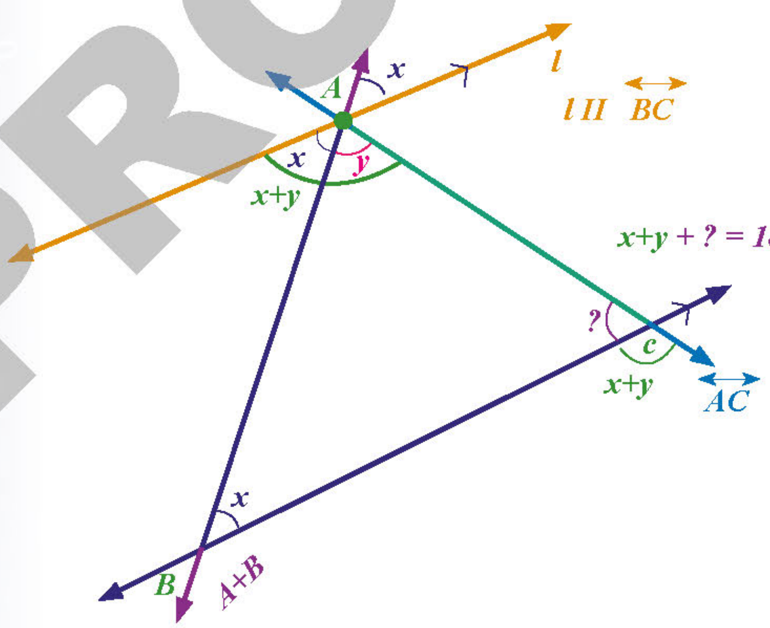
Una de las características de los triángulos es que la suma de sus ángulos internos siempre suma 180 grados.

Esto lo podemos comprobar de la siguiente manera :

Dibujemos un triángulo sin importar sus medidas, si trazamos una paralela a cualquiera de sus lados sobre el vértice opuesto, prolongamos las líneas que forman el triángulo y marcamos los ángulos complementarios sobre la línea, veremos que se corresponden con los ángulos internos del triángulo. (Al igual que vimos en nuestro experimento con los lápices). De esta manera podemos comprobar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180 grados.



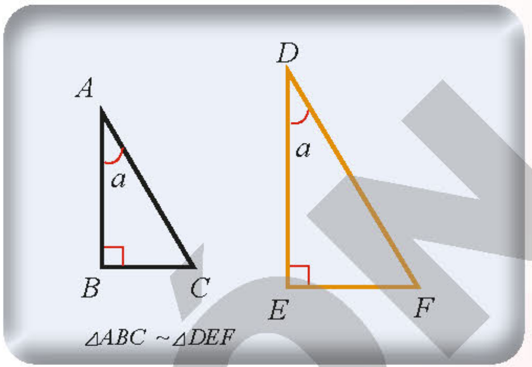
Sigue el enlace para ver como los ángulos internos de un triángulo suman 180 grados.



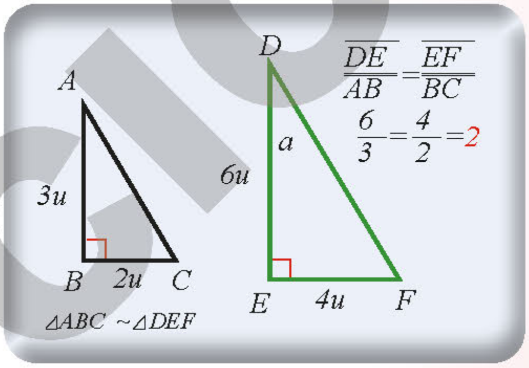
Semejanza

En geometría se dice que dos o más figuras son semejantes cuando tienen las mismas proporciones, aún cuando difieran en su tamaño.

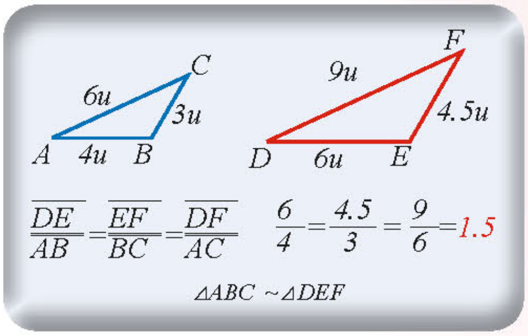
1º Caso AA: Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos respectivamente iguales.



2º Caso LAL: Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados son proporcionales respectivamente y congruente el ángulo que forman.



3º Caso LLL: Dos triángulos son semejantes si sus tres lados son respectivamente proporcionales.



Cuando dos figuras u objetos son semejantes, la diferencia de sus proporciones se la llama **razón de semejanza.**

$$\frac{a}{a'} = \text{razón de semejanza}$$

¡SABÍAS QUÉ?...

En el diseño y la arquitectura comúnmente se trabaja con planos que son una representación a escala de lo que se quiere construir. La escala es la relación de semejanza entre las dimensiones reales de un objeto y las del dibujo que lo representa.

Una escala, por ejemplo, se escribe 1:50 y se lee uno a cincuenta, lo cual quiere decir que la representación es cincuenta veces más pequeña que el objeto real. Una unidad en el plano, corresponde a 50 unidades en la realidad.

Congruencia

En geometría la congruencia es un caso de semejanza en la cual dos o más figuras tienen las mismas proporciones y las mismas dimensiones.

Las condiciones mínimas que deben cumplir dos triángulos para que sean congruentes se establecen a través de los llamados teoremas de congruencia los cuales son:

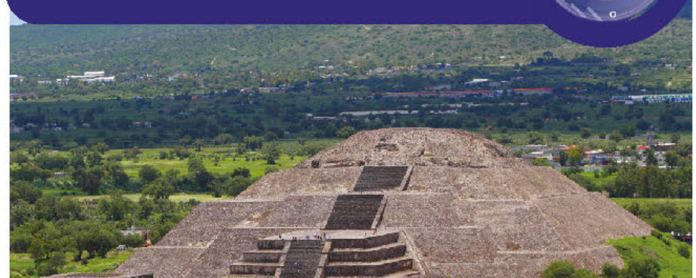
1° Caso LAL: Dos triángulos son congruentes si tienen iguales dos de sus lados respectivos y el ángulo comprendido entre ellos.
2° Caso ALA: Dos triángulos son congruentes si tienen iguales dos de sus ángulos respectivos y el lado entre ellos.
3° Caso LLL: Dos triángulos son congruentes si tienen iguales los tres lados.

Autosemejanza

En matemáticas, la autosemejanza o autosimilitud es la característica de un objeto en la que el todo es similar o aproximadamente similar a una parte de si mismo.

Este tema lo abordaremos más adelante en la Progresión 9.

6° interculturalidad



Interculturalidad

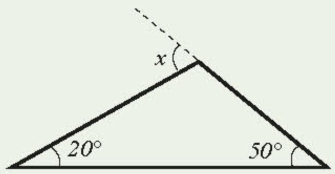
La Pirámide del Sol, símbolo de la grandeza mesoamericana, muestra cómo las civilizaciones antiguas aplicaron principios geométricos en sus construcciones. Este legado refleja la diversidad cultural y lingüística, y demuestra que la matemática es un lenguaje universal que conecta culturas y épocas.

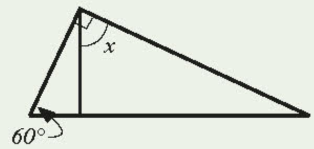
Actividad de aprendizaje

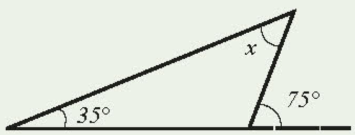
Elaborar 5E

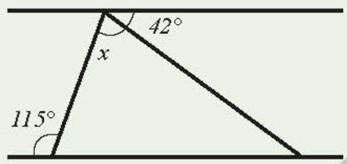
F. Sigue las instrucciones en los siguientes ejercicios.

1. Determina el valor del ángulo x:



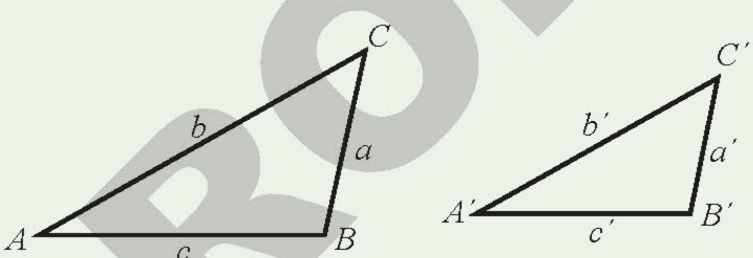






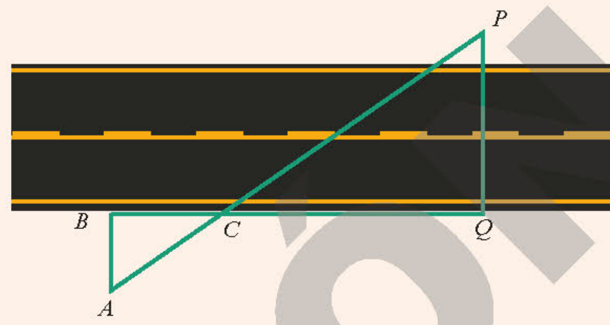
2. Calcula la altura de un edificio si su sombra mide 80 metros y la sombra de un poste de 0.9 metros mide 60 cm.

3. ¿Cuál es la proporción o razón de semejanza del triángulo A'B'C' respecto a ABC, si AB = 15 y A'B'=3?



4. ¿Cual es el ancho de una avenida (PQ) si se tienen las siguientes medidas

$AB = 2$ *metros*
$BC = 3$ *metros*
$CQ = 18$ *metros*



5. Investiga y menciona al menos tres propiedades de los triángulos.

6. Si un objeto en un plano mide 20 centímetros y la escala del plano es 5:1 ¿Cuánto medirá el objeto real?

¡Guardianes del Conocimiento, misión cumplida!
Han resuelto cada desafío del "Reino Geométrico", y demostraron que las matemáticas son una herramienta poderosa para entender y transformar el mundo. Su viaje continúa: sigan explorando, aprendiendo y aplicando su conocimiento para construir un futuro mejor.

ATERRIZAJE
(CIERRE)

Evaluar 5E

G. **Con los conocimientos adquiridos en esta progresión, responde las siguientes preguntas.**

Test de bases de geometría y trigonometría

Escala de Respuestas:
Sí: Manejo los conceptos con naturalidad y los puedo aplicar en situaciones reales. (3 puntos)
Regular: Entiendo los conceptos, pero me cuesta aplicarlos para resolver problemas. (2 puntos)
No: No entiendo los conceptos. (1 puntos)

1. ¿Entiendo los conceptos y relaciones de los ángulos?

   Si Regular No

2. ¿Entiendo porque la suma de los ángulos internos de triángulo siempre es 180 grados?

   Si Regular No

3. ¿Entiendo el principio de semejanza y su aplicación en planos o para resolver problemas?

   Si Regular No

Puntuación:
Suma tus respuestas y evalúa la comprensión de esta progresión:
8-9 Comprensión de bases de geometría óptima
6-7 Comprensión de bases de geometría moderada, pero puede mejorar.
3-5 Comprensión de bases de geometría baja, considera tomar una asesoría.

¿Cuál fue tu resultado?

En equipos de 5 personas, comparen sus respuestas y discutan los temas que necesiten reforzar.

Progresión de aprendizaje **2**

El triángulo y sus relaciones

Equipaje de mano

Metas
M2.1, M2.2
Categorías
C1, C2
Subcategorías
S2.1, S2.2

ABORDAJE
(INICIO)

¡Viajeros del tiempo, prepárense! Descubramos cómo la trigonometría ayudó a los arquitectos antiguos a diseñar pirámides que desafían el tiempo. ¡Manos a la obra!

¿Sabías que los antiguos egipcios usaron triángulos para construir las pirámides? Imagina que estás en el desierto trabajando como arquitecto y necesitas calcular la altura de una pirámide. Sólo tienes un palo para medir sombras y sabes que el ángulo del Sol con respecto al suelo es de 45°. Si la sombra de la pirámide mide 30 metros, ¿cómo podrías calcular su altura?

MOMENTO DE REFLEXIÓN

A. Reflexiona: ¿Qué tiene que ver este problema con los triángulos y las matemáticas que conoces?

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

5E Explorar

Desarrollo de la trigonometría

La trigonometría, al igual que otras ciencias, surgió de la necesidad de resolver problemas prácticos y comprender mejor el mundo que nos rodea. Hace más de tres mil años, los babilonios y egipcios emplearon los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para realizar mediciones relacionadas con la agricultura y la construcción, como las majestuosas pirámides. La observación de las sombras proyectadas condujo al estudio de los triángulos semejantes, mientras que, de manera paralela, emergía otra rama de las matemáticas impulsada por el deseo humano de desentrañar los misterios y maravillas del universo.

El estudio de la trigonometría se trasladó posteriormente a Grecia, donde los sabios lograron transformar su enfoque desde un método empírico hacia uno deductivo. Este cambio marcó un hito en la historia de la geometría. Tales de Mileto (624 a.C.), considerado uno de los pioneros en esta transformación, tuvo como discípulo a Pitágoras, quien más tarde aportaría importantes desarrollos matemáticos. Por otro lado, Hiparco de Nicea, matemático y astrónomo del siglo II a.C., buscó convertir la astronomía en una ciencia más precisa, basada en mediciones rigurosas y herramientas matemáticas que permitieran predecir eclipses, trazar el movimiento de los astros, crear calendarios más exactos y facilitar la navegación.

Desde Grecia, la trigonometría se expandió a la India y Arabia, donde continuó desempeñando un papel crucial en la astronomía. Más tarde, llegó a Europa a través del mundo árabe, donde finalmente se consolidó como una rama independiente de las matemáticas, separada de la astronomía.

En el siglo II d.C., el astrónomo Claudio Ptolomeo realizó significativas contribuciones a la trigonometría con su tratado Sintaxis Matemática, conocido en el mundo árabe como Almagesto o La Gran Colección. Este trabajo fue fundamental para integrar elementos de aritmética, álgebra y geometría que impulsaron el desarrollo de la trigonometría, la cual, hacia el año 1000, sería llevada a Europa Occidental.

La invención de los logaritmos por John Napier a principios del siglo XVII representó un gran avance para la trigonometría, al igual que el cálculo diferencial e integral introducido por Isaac Newton a mediados del mismo siglo. Más adelante, en el siglo XVIII, el matemático Leonhard Euler demostró que las propiedades trigonométricas derivan de la aritmética de los números complejos. Además, definió las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos, lo que estableció una conexión sólida entre la trigonometría y el análisis matemático.

Con la invención del cálculo, las funciones trigonométricas se integraron plenamente al análisis matemático, donde aún hoy desempeñan un papel crucial tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

B. Responde las siguientes preguntas con base en el texto que acabas de leer.

1. ¿Quién fue Tales de Mileto?

2. ¿Quién fue Hiparco de Nicea?

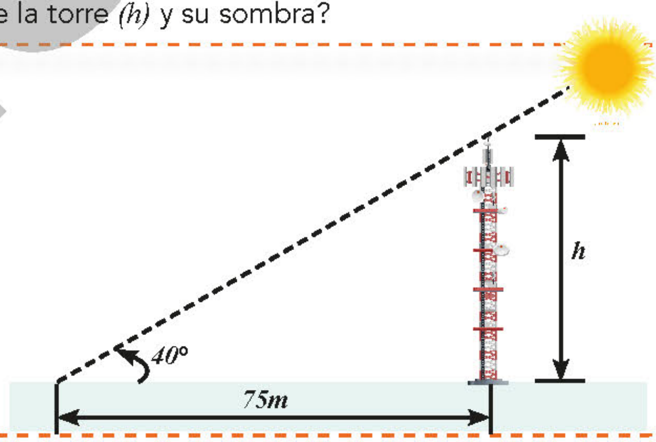
3. ¿Quién fue Claudio Tolomeo?

4. ¿Quién fue Leonhard Euler?

C. Resuelve los siguientes problemas.

1. Una torre proyecta una sombra de 75 metros, en ese momento el sol tiene una inclinación de 40 grados. ¿Cuál es la relación trigonométrica entre la altura de la torre *(h)* y su sombra?

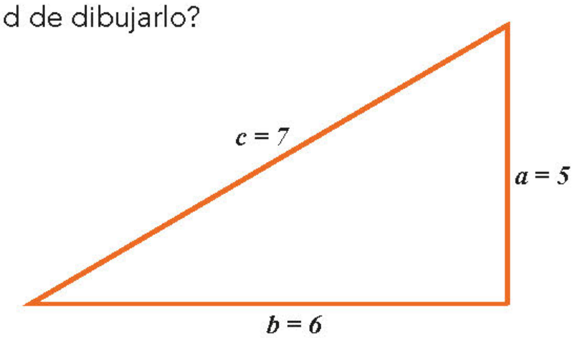
Despeja h y calcula la altura de la torre



2. Si las medidas de un triángulo son $a = 5$, $b = 6$ y $c = 7$.

¿Es posible saber si es un triángulo rectángulo sin necesidad de dibujarlo?

¿Qué formulación matemática usarías para comprobarlo?



3. Se debe realizar el plano en planta de un andador que sube por una colina, el cual se compone de tres segmentos. En cada segmento se midió la longitud sobre el piso y la diferencia de altura entre el inicio y el final. ¿Cuánto debe medir la representación en planta de cada tramo?

Tramo 1: 15 m de largo y 3 de altura   Tramos 2: 10 m de largo y 1.5 de altura   Tramo 3: 12 m de largo y 2 de altura

Representa en el siguiente cuadro las medidas de cada tramo:

Tramo 1	Tramo 2	Tramo 3

A lo largo de la historia de la trigonometría, al igual que en muchas otras disciplinas, artes y ciencias, se han desarrollado diversos teoremas y leyes matemáticas que se fundamentan en conocimientos previos, construyendo así un sólido cuerpo teórico a lo largo del tiempo.

Teorema de Pitágoras

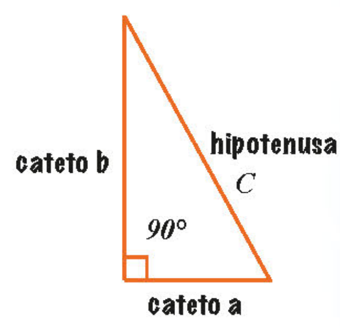
Establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo. En el triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto se denomina **hipotenusa**, mientras que los lados del triángulo que forman el ángulo de 90° se llaman **catetos**.

El teorema de Pitágoras establece que:

"En todo triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa."

Y se puede representar como:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Scanea el QR para ver una demostración del Teorema de Pitágoras. Haz un resumen en tu cuaderno de la información más relevante del vídeo.

Recíproco del Teorema de Pitágoras

También podemos usar el Teorema de Pitágoras para verificar si un triángulo es rectángulo, esto se logra al comprobar que las longitudes de los lados del triángulo cumplen con la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$. A lo que se le conoce como Recíproco del Teorema de Pitágoras.

En los casos que no se cumpla la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Podemos deducir dos opciones:

1. Si $a^2 + b^2 < c^2$, es decir, que la suma del cuadrado de los catetos, es menor que el cuadrado del lado opuesto a dicho ángulo, entonces tenemos un triángulo obtusángulo, cuyo ángulo es mayor a 90°.
2. Si $a^2 + b^2 > c^2$, es decir, que la suma del cuadrado de los catetos, es mayor que el cuadrado del lado opuesto a dicho ángulo, entonces tenemos un triángulo acutángulo, cuyo ángulo es menor a 90°.

Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas son una herramienta matemática fundamental que nos ayuda a comprender las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos rectángulos. Para empezar, vamos a definir la manera de nombrar los lados de un triángulo rectángulo.

Denominamos **hipotenusa** al lado opuesto al ángulo recto, siendo el más largo del triángulo, y **catetos** a los dos lados más cortos que se encuentran formando dicho ángulo recto.

Si tomamos cualquiera de los ángulos agudos, al cateto que forma dicho ángulo junto con la hipotenusa, lo llamaremos **cateto adyacente**, mientras que al cateto que se encuentra opuesto a dicho ángulo, lo llamaremos **cateto opuesto**.

Un buen recurso mnemotécnico para recordar las relaciones de las funciones trigonométricas de seno, coseno y tangente es: ***soh cah toa*** .

Seno = Opuesto / Hipotenusa

Coseno = Adyacente / Hipotenusa

Tangente = Opuesto / Adyacente

Para definir las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo, tomemos uno de sus ángulos agudos al que llamaremos α.

Nombre	Relación	Notación
Seno de α	$\frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{hiptenusa}}$	Sin α
Coseno de α	$\frac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$	Cos α
Tangente de α	$\frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$	Tan α
Cotangente de α	$\frac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opueto a } \alpha}$	Cot α
Secante de α	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$	Sec α
Cosecante de α	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$	Csc α

La función seno de un ángulo en un triángulo rectángulo se define como la relación entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y la longitud de la hipotenusa. Su fórmula es:

$$\sin(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Esta función indica la proporción entre el lado opuesto al ángulo y la hipotenusa.

De manera similar, la función coseno de un ángulo se define como la relación entre la longitud del cateto adyacente al ángulo y la longitud de la hipotenusa, expresada como:

$$\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Ambas funciones, seno y coseno, producen valores que siempre están en el rango -1 y 1.

- Cuando el ángulo es de 90 grados, el cateto opuesto es igual a la hipotenusa, lo que hace que el seno sea igual a 1, y el coseno sea 0.
- Cuando el ángulo es de 0 grados, el cateto opuesto tiene longitud cero, lo que hace que el seno sea 0, y el coseno sea 1.

Por otro lado, la función tangente de un ángulo se define como la relación entre el cateto opuesto y el cateto adyacente, con la fórmula:

$$\tan(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

A diferencia del seno y el coseno, la función tangente puede tomar cualquier valor real positivo o negativo. Sin embargo, se vuelve indefinida cuando el ángulo es de 90 grados, ya que el cateto adyacente es cero, lo que genera una división por cero.

La función tangente es diferente de las funciones seno y coseno porque puede tomar **valores positivos y negativos, y se vuelve infinita cuando el ángulo es de 90 grados.** La gráfica de la función tangente muestra puntos donde la función se acerca infinitamente a la línea horizontal y cruza el eje vertical en puntos donde el ángulo es múltiplo de **180 grados**. Estos puntos se denominan **"asíntotas"** y son cruciales para entender el comportamiento de la función.

1° fomentar la identidad de México.

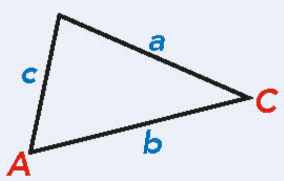
Al estudiar las pirámides y construciones del México antiguo, descubrimos cómo la trigonometría permitió a nuestros ancestros crear maravillas arquitectónicas. Conocer estos logros nos ayuda a valorar nuestra historia, cultura y tradiciones, lo que fortalece nuestro amor por México y su legado, al tiempo que respetamos la diversidad cultural que nos enriquece.

Ley de Senos

Esta ley establece que la proporción entre la longitud de un lado y su ángulo opuesto, es constante para todo el triángulo.

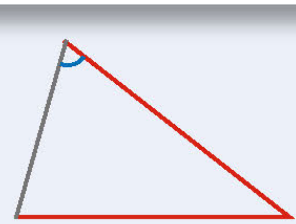
Es útil para encontrar la parte faltante de un triángulo siempre y cuando se tenga:
A: dos lados y un ángulo (opuesto a uno de los lado que se tiene)
B: dos ángulos y un lado.

LEY DE LOS SENOS

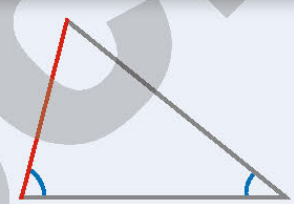


$$\frac{sen\,A}{a} = \frac{sen\,B}{b} = \frac{sen\,C}{c}$$

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$$



2 lados y 1 ángulo
(opuesto a uno de ellos)



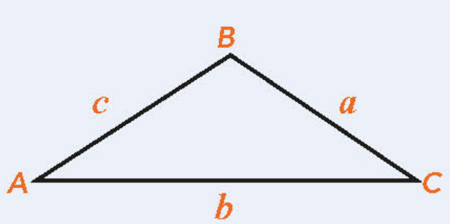
1 lados (cualquiera)
y 2 ángulos

Ley de Cosenos

Esta ley establece que el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados menos el doble del producto de sus longitudes por el coseno del ángulo opuesto al lado buscado.

Es especialmente útil para encontrar:
A: la medida de un ángulo cuando están dadas todas las longitudes de los lados.
B: un lado faltante cuando están dados los otros lados y la medida de uno de los ángulos.

LEY DE LOS SENOS

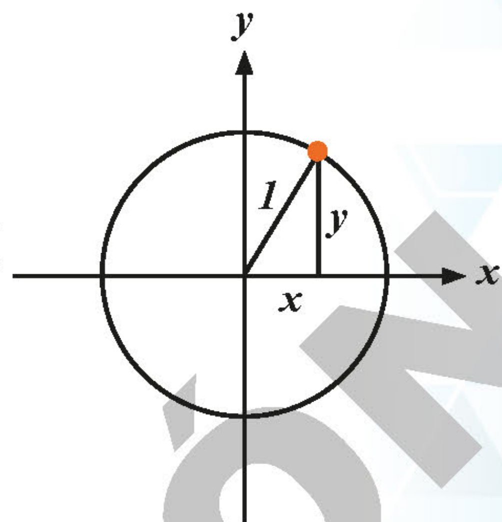


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$$

$$a^b = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$$

$$c^b = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$$

Círculo Unitario



Muchos elementos de la trigonometría se desarrollan en el círculo unitario. Éste es un círculo cuyo radio tiene una longitud de una unidad y cuyo centro se encuentra en el origen de un plano cartesiano.
El círculo unitario es una herramienta muy útil pues nos permite ver de manera más clara las relaciones que establecen las funciones trigonométricas.

Estas relaciones se podrían establecer de la siguiente manera:

Seno corresponde a la medida del ángulo respecto al eje *y*.

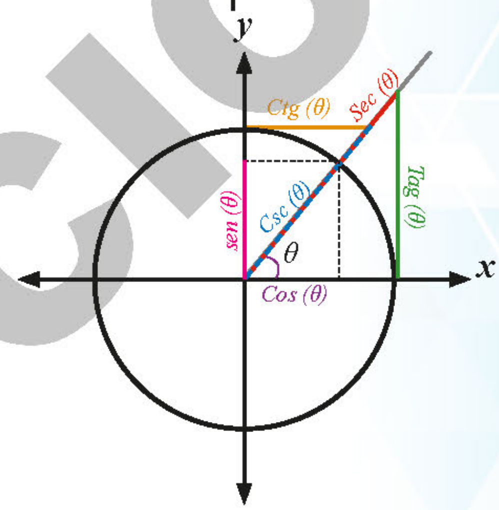
Coseno corresponde a la medida del ángulo respecto al eje *x*.

Tangente es la medida de la proyección del ángulo sobre una recta perpendicular al eje *x* tangente a la circunferencia.

Cotangente es la medida de la proyección del ángulo sobre una recta perpendicular al eje *y* tangente a la circunferencia.

Secante es la hipotenusa proyectada hasta una recta perpendicular al eje *x* tangente a la circunferencia.

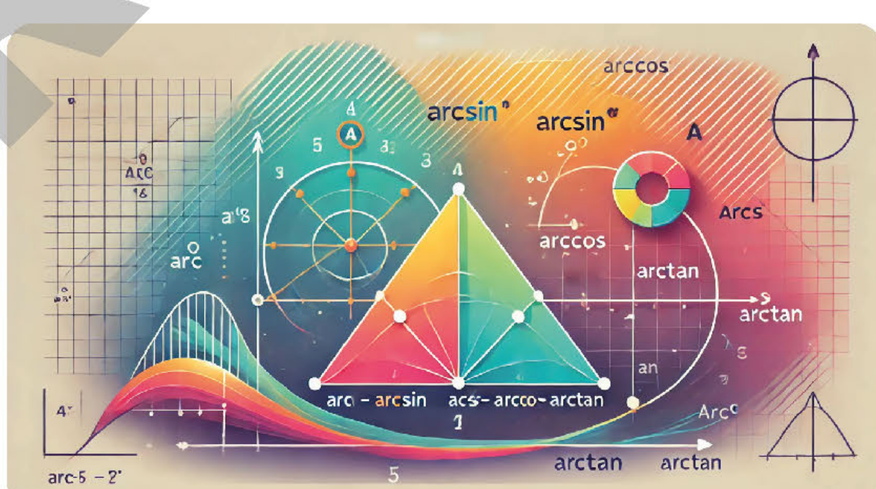
Cosecante es la hipotenusa proyectada hasta una recta perpendicular al eje y tangente a la circunferencia.



Funciones Inversas

Las **funciones trigonométricas inversas**, que hacen lo contrario a las funciones trigonométricas: toman una razón y devuelven el ángulo correspondiente. Las funciones inversas más comunes son el **arcseno (arcsin) o (sen^{-1}), el arcocoseno (arccos) o (cos^{-1}) y el arcotangente (arctan) o (tan^{-1}).**

Estas funciones son valiosas cuando conocemos una razón y queremos encontrar el ángulo. Por ejemplo, si sabemos que el seno de un ángulo es 0.5, podemos usar la función inversa del seno para encontrar el ángulo que tiene este valor.



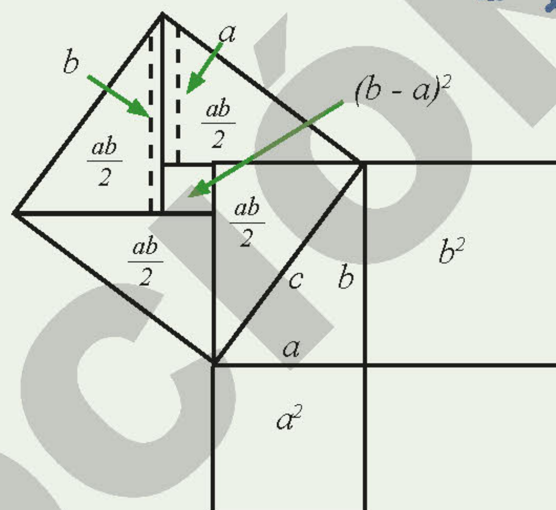
Actividad de aprendizaje

Elaborar 5E

D. Resuelve los siguientes problemas.

1. Si trasladamos al cuadrado de la hipotenusa las medidas de los lados a y b, vemos que se forma en un pequeño cuadrado de área $(b-a)^2$ y cuatro triángulos rectángulos iguales de área $ab/2$.

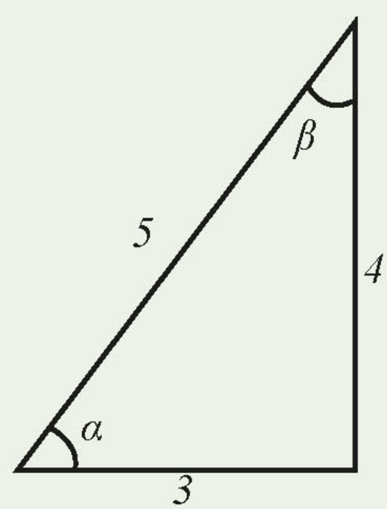
Desarrolla la fórmula de c^2 para obtener una comprobación al *Teorema de Pitágoras*.



2. Se debe comprar el barandal que vaya paralelo a una escalera la cual en planta tiene 3.5 metros y libra una altura de 2.4 metros. ¿Qué relación matemática debemos usar para obtener el resultado? ¿Cuántos metros de barandal se requiere para que acompañen el desarrollo de la escalera?

3. Calcula las 6 funciones trigonométricas del ángulo α.

Sen =	
Cos =	
Tan =	
Cot =	
Sec =	
Csc =	



Evaluar 5E

E. **Con los conocimientos adquiridos, responde las siguientes preguntas.**

Test de trigonometría

Escala de Respuestas:
Sí: Manejo los conceptos con naturalidad y los puedo aplicar en situaciones reales. (3 puntos)
Regular: Entiendo los conceptos, pero me cuesta aplicarlos para resolver problemas. (2 puntos)
No: No entiendo los conceptos. (1 puntos)

1. ¿Sé aplicar el Teorema de Pitágoras y su recíproco?

Si Regular No

2. ¿Entiendo las funciones de seno, coseno y tangente y cómo se utilizan?

Si Regular No

3. ¿Sé cuándo usar la ley de senos y de cosenos?

Si Regular No

4. ¿Entiendo la relación de las funciones trigonométricas con el círculo unitario?

Si Regular No

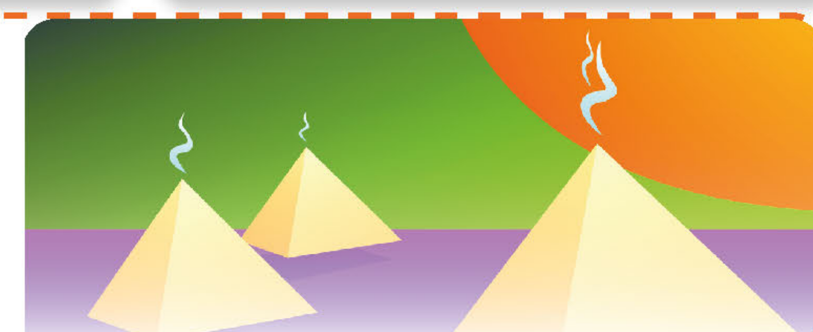
Puntuación:
Suma tus respuestas y evalúa tu comprensión de esta progresión:

10-12 Comprensión de bases trigonométricas óptima.
7-9 Comprensión de bases trigonométricas moderada, pero puede mejorar.
4-6 Comprensión de bases trigonométricas baja, considera tomar una asesoría.

¿Cuál fue tu resultado?

En equipos de 5 personas, comparen sus respuestas y discutan los temas que necesiten reforzar.

Felicidades, viajeros del tiempo! Han descubierto cómo la trigonometría ha sido clave a lo largo de la historia.
Ahora, con este conocimiento, ¡están listos para enfrentar nuevos desafíos en su aventura matemática!



Progresión de aprendizaje **3**

Geometría euclidiana y no euclidiana

Equipaje de mano

Metas
M1.1, M2.2
Categorías
C1, C2
Subcategorías
S2.1, S1.2, S2.2

¡Bienvenidos a "Desafío Geométrico", donde los equipos resolverán retos y dominarán la geometría! ¿Listos para ganar?

ABORDAJE
(INICIO)

5E Enganchar

Actividad de aprendizaje

A. En equipos de cuatro observen el siguiente video y contesten la pregunta mediante un diálogo grupal.

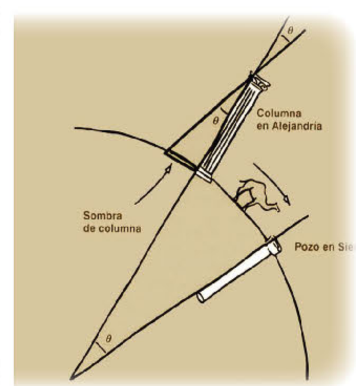
Eratóstenes y la Circunferencia de la Tierra

¿Cómo recrearían el experimento de medir la circunferencia de la Tierra, usando las tecnologías con las que actualmente se cuenta?

Eratóstenes y la Medición de la Tierra

Hace más de dos mil años, un hombre logró calcular la circunferencia de la Tierra con notable precisión. Esta hazaña del siglo III a.C., no sólo fue un testimonio del poder de la mente humana, sino también una lección de cómo la observación y el razonamiento pueden revelar los secretos del universo.

Eratóstenes de Cirene, un brillante matemático, astrónomo y geógrafo, era el director de la Gran Biblioteca de Alejandría. En una de sus lecturas, se encontró el reporte de un fenómeno curioso: en la ciudad de Siene (actual Asuán, Egipto), durante el mediodía del solsticio de verano, los objetos, en especial los obeliscos, no producían sombra y los rayos del sol llegaban hasta el fondo de los pozos. Intrigado, Eratóstenes decidió comparar esta observación con lo que ocurría el mismo día y a la misma hora en Alejandría, una ciudad ubicada 800 km. al norte de Siene.



En Alejandría, los objetos sí proyectaban sombras, lo que sugería que los rayos solares no llegaban de manera perpendicular. Eratóstenes midió el ángulo de la sombra proyectada por un obelisco y descubrió que era de aproximadamente 7.2 grados.

Con esta observación, Eratóstenes formuló una hipótesis audaz: si la Tierra es una esfera, la diferencia en la inclinación de los rayos del sol en ambas ciudades debía corresponder a la curvatura del planeta. Sabía además que la distancia entre Alejandría y Siene era de unos 5,000 estadios (una unidad de medida antigua). Con estos datos, calculó que la circunferencia total de la Tierra era de aproximadamente 250,000 estadios, lo que se traduce a unos 40,000 kilómetros. Hoy en día, la circunferencia de la Tierra, está calculada en 40.008 km. ¡Vaya precisión!

Eratóstenes no solo midió la Tierra; demostró que la curiosidad, el ingenio y la observación meticulosa pueden expandir los límites del conocimiento humano. Su logro nos recuerda que, incluso con herramientas simples, la mente humana tiene la capacidad de explorar lo desconocido y transformar preguntas aparentemente simples en descubrimientos trascendentales.

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

Explorar 5E

B. En equipos de tres estudiantes, investiguen y resuelvan lo siguiente:

Un día, Eratóstenes encontró un reporte de que en Siene, a medio día del solsticio de verano, los objetos no proyectaban sombra, En Alejandría, ese mismo día y hora, los objetos proyectaban sombras, lo que sugería que los rayos solares no llegaban de manera perpendicular. Eratóstenes midió el ángulo de la sombra proyectada por un obelisco y la calculó en aproximadamente 7.2 grados.

Con esta observación, Eratóstenes formuló una hipótesis audaz: si la Tierra es una esfera, la diferencia en la inclinación de los rayos del sol en ambas ciudades debía corresponder a la curvatura del planeta. Sabía que la distancia entre Alejandría y Siene era de unos 5,000 estadios (una unidad de medida antigua). Con estos datos, calculó la circunferencia total de la Tierra.

1. A partir del texto anterior, calcula la circunferencia de la tierra, considerando que un estadio mide 160 metros.

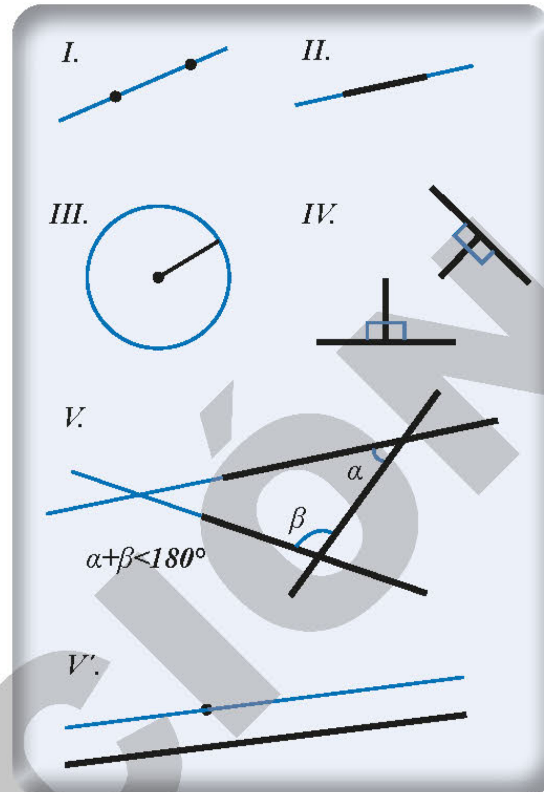
2. ¿En qué aspectos de la vida diaria podemos ver el uso de la geometría euclidiana?

3. Mencionen 3 o más elementos básicos de la geometría euclidiana

4. ¿Cuáles son los postulados que propone Euclides en su libro "Los Elementos"?

Explicar

La **Geometría Euclidiana** es una de las ramas fundamentales de las matemáticas que estudia las propiedades y relaciones de puntos, líneas, planos y figuras en un espacio bidimensional o tridimensional.



Debe su nombre a **Euclides de Alejandría**, un matemático griego del siglo III a.C., quien organizó y sistematizó este conocimiento en su famoso libro Los Elementos.
En esencia, la Geometría Euclidiana se basa en cinco postulados o axiomas fundamentales, que son enunciados tan evidentes que no necesitan demostración.

El enfoque euclidiano es deductivo, se enfoca en el estudio de las figuras geométricas mediante construcciones y razonamientos, sin el uso de números, mediante criterios geométricos. Este método permite describir y analizar las figuras geométricas clásicas como triángulos, círculos, rectángulos y esferas, así como calcular longitudes, áreas y volúmenes.

La Geometría Euclidiana no sólo es una herramienta esencial para entender el espacio que nos rodea, sino que también sienta las bases para el desarrollo de muchas otras ramas de las matemáticas y disciplinas como la física, la ingeniería y la arquitectura. Su simplicidad y precisión la convierten en una piedra angular del conocimiento matemático y en un punto de partida para explorar conceptos más avanzados, como la Geometría No Euclidiana y la Geometría Analítica.

Los cinco postulados de Euclides:
Los postulados de Euclides, propuestos en su libro *Los Elementos*, son la base de la geometría euclidiana, también conocida como geometría plana, y son fundamentales para comprender su funcionamiento.

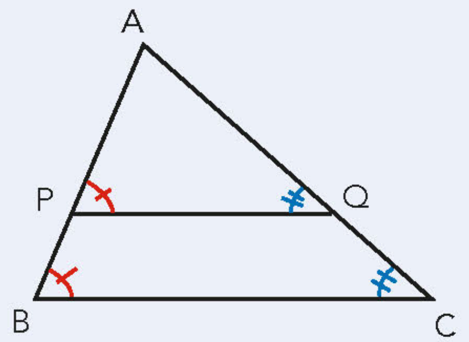
- Primer postulado:
  Dados dos puntos en el plano, existe una línea recta que pasa por ellos.
- Segundo postulado:
  Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
- Tercer postulado:
  Dado un segmento de recta y un punto en ella, puede dibujarse un círculo con cualquier centro y radio.
- Cuarto postulado:
  Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Quinto postulado primera forma:
  Postulado de las paralelas. Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.
- Quinto postulado segunda forma:
  Por un punto cualquiera que no pertenezca a una recta dada, puede trazarse una recta y solo una, paralela a la recta dada.
  Cabe aclarar que ambas formas del quinto postulado son equivalentes.

El quinto postulado, además de ser el más destacado de los cinco por distintos motivos, es importante también porque su negación da origen a la Geometría No Euclidiana que abordaremos más adelante.

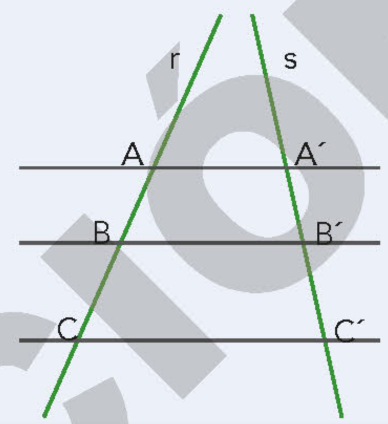
El triángulo, al ser el más elemental de los polígonos, es el punto de partida para muchos de los teoremas y criterios de los que se vale la geometría euclidiana.

Teorema de Tales 1: Establece que, si se traza una línea paralela a un lado de un triángulo, se forma otro triángulo semejante al original. Se considera el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

$$AP / AQ = AB / AC$$



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$



Teorema de Tales 2: Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas, es igual a la razón de los segmentos correspondientes en la otra.

Criterio de Congruencia: Si se cumple cualquiera de las condiciones LLL, LAL o ALA que vimos en la progresión 1, significa que dos triángulos son congruentes.

$$(LLL)\ AB = DE,\ \ BC = EF\ \ y\ \ CA = FD$$
$$(LAL)\ AB = DE,\ \ \angle BAC = \angle EDF\ \ y\ \ CA = FD$$
$$(ALA)\ \angle BAC = \angle EDF,\ \ CA = FD\ \ y\ \ \angle BAC = \angle EFD$$

Criterio de Semejanza: Si se cumple cualquiera de las condiciones LLL, LAL o AA que vimos en la progresión 1, significa que dos triángulos son semejantes.

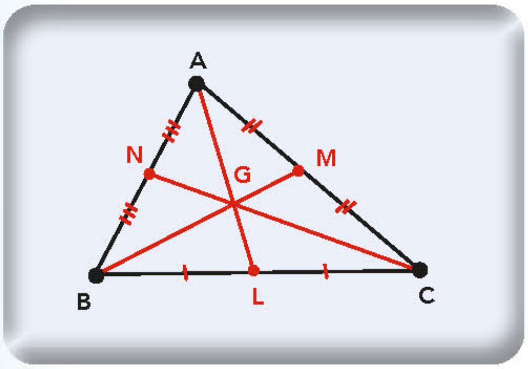
$$(LLL)\ AB / DE = BC / EF = CA / FD$$
$$(LAL)\ AB / DE = CA / FD\ \ y\ \ \angle BAC = \angle EDF$$
$$(AA)\ \angle BAC = \angle EDF\ \ y\ \ \angle BCA = \angle EFD$$

Ángulos de un triángulo: Considera las propiedades de los ángulos de un triángulo:

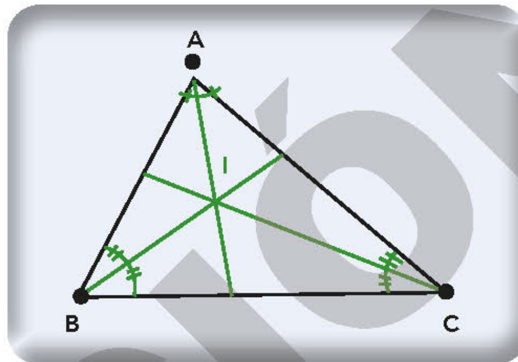
1. La suma de los ángulos internos de un triángulo siempre es 180°.
2. La suma de los ángulos externos de un triángulo siempre es 360°.
3. Cualquier ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes y entre éstos siempre suman 180°.

Puntos notables de un triángulo:

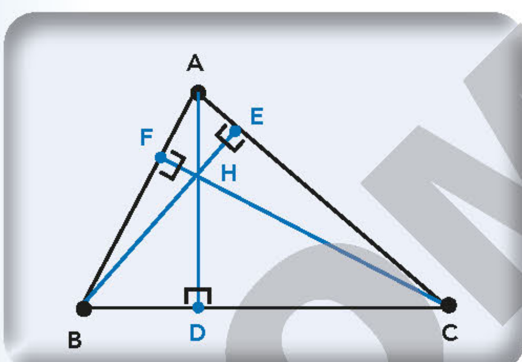
Medianas: Los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto se llaman medianas. Éstas se intersectan en un solo punto, llamado baricentro o gravicentro.



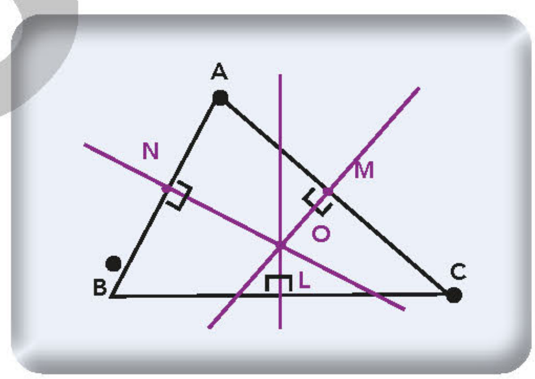
Bisectrices: Son las rectas que cortan por la mitad cada uno de los ángulos internos de un triángulo. A la intersección de estas líneas se le llama incentro, desde este punto se puede trazar una única circunferencia que es tangente a los segmentos de recta que son los lados del triángulo.



Alturas: la altura desde un vértice al lado opuesto es perpendicular a ese lado. Éstas se intersectan en un punto llamado otrocentro.



Mediatrices: Son las rectas perpendiculares que pasan por los puntos medios de los lados de un triángulo, Concurren en un punto llamado circuncentro y sirve como centro a una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.



8° Respeto a la naturaleza

Con la geometría, se diseñan paneles solares y turbinas eólicas eficientes que promueven el uso de energías limpias y reducen el impacto ambiental.

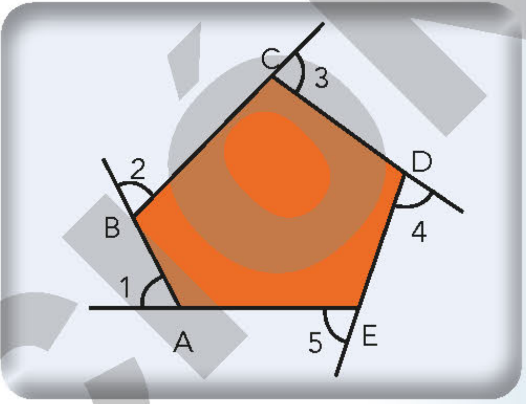
Polígonos

Un polígono es una porción de plano limitada por segmentos de líneas llamadas lados. Los polígonos se pueden clasificar en regulares e irregulares. Un polígono regular tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales, mientras que un polígono irregular no tiene sus lados y ángulos iguales.

Algunas de las características de los polígonos son:

1. La suma de los ángulos externos de un polígono siempre es 360° .

ángulos 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 360°



2. La suma de los ángulos internos de un polígono, se obtiene mediante la fórmula:

$$(n-2) * 180°$$

Donde "n" representa el número de lados del polígono.

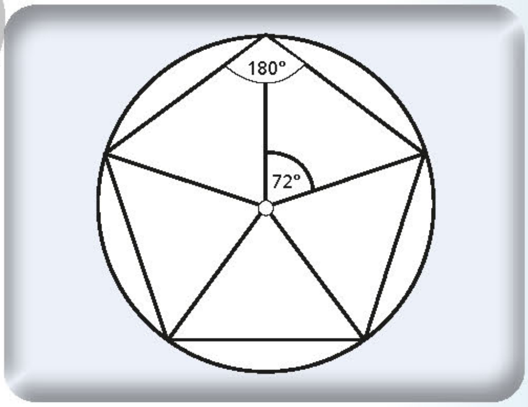
En el caso de un polígono regular, al resultado de ***(n-2) * 180°*** podemos dividirlo entre el número de lados del polígono (valor que usamos para n) y con esto podemos obtener la amplitud de sus ángulos internos.

Ej, para un pentágono n=5

$(n-2) * 180°$

$(5-2) * 180 = 3 * 180 = 540°$ suma de ángulos internos

$540° / 5 = 108°$ es la amplitud de cada uno de sus ángulos.



C. Sigue el enlace para ver cómo obtener los ángulos internos de cualquier polígono regular.

Con la ayuda de un compás y un transportador, traza un polígono de 6 o más lados.

3. Un polígono puede dividirse en n-2 triángulos. Esto se logra al trazar una diagonal desde cualquier vértice hacia los vértices opuestos, excluyendo ese mismo vértice y los dos contiguos.

Geometría No Euclidiana

El cálculo de la circunferencia de la Tierra por Eratóstenes fue sin duda una proeza del ingenio humano y su capacidad para sintetizar problemas complejos. Esta solución tiene sus bases en la geometría tradicional que se desarrolla en un espacio plano. Durante cientos de años no se cuestionó la posibilidad de que hubiera otros enfoques para abordar los problemas geométricos, hasta la llegada de la Geometría no Euclidiana.

Llamamos Geometría no Euclidiana a todos los modelos geométricos que no se ajustan a alguno de los postulados de Euclides. Esta rama de las matemáticas desafía y amplía los principios establecidos en la geometría tradicional de Euclides, especialmente el quinto postulado, también llamado **postulado de las paralelas**. A partir de este cuestionamiento, se desarrollaron principalmente dos nuevas geometrías:

1. **Geometría Esférica**, donde no existe ninguna línea paralela a la original.
2. **Geometría Hiperbólica**, en la cual por un punto externo pasan infinitas líneas paralelas a una línea dada.

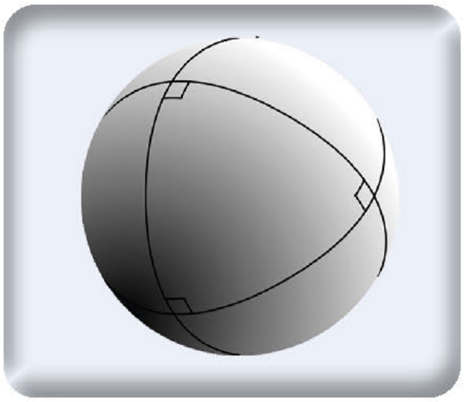
Estas geometrías tienen aplicaciones en espacios curvos y no planos, como la superficie de una esfera (geometría elíptica) o el modelo de un hiperboloide (geometría hiperbólica). A diferencia de la geometría euclidiana, que se desarrolla en un espacio plano, las geometrías no euclidianas son esenciales para entender estructuras en espacios curvos.

La introducción de estas ideas, desarrolladas por matemáticos como **Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevski** y **János Bolyai**, marcó un hito en la historia de las matemáticas, rompiendo con siglos de pensamiento geométrico tradicional. Más tarde, estas ideas jugaron un papel crucial en el desarrollo de la **Teoría de la Relatividad General** de Albert Einstein, donde el espacio-tiempo se describe como curvo, utilizando principios de Geometría No Euclidiana.

La Geometría no Euclidiana abre la puerta a la comprensión de espacios más complejos que los planos, ampliando el horizonte de las matemáticas y sus aplicaciones en el mundo real y en la descripción del universo.

Geometría Esférica

En la Geometría Esférica no existen rectas paralelas. Si se sigue el postulado de paralelismo de la geometría euclidiana, donde dos líneas rectas que son paralelas entre sí, aun cuando se prolonguen indefinidamente, nunca se cortan, encontramos que en la geometría esférica no existen rectas paralelas ya que todo par de líneas rectas paralelas al prolongarlas a sus círculos máximos se cortan en dos puntos.



Otro punto de la geometría tradicional que no se cumple en la geometría esférica es que la suma de los ángulos internos de un triángulo esférico es mayor a 180°.

4° Participación en la Transformación en la sociedad.

La geometría analítica y no euclidiana permiten resolver problemas como el diseño de espacios públicos o rutas eficientes. Trabajar en equipo fomenta soluciones comunitarias y desarrolla la cooperación.

Actividad de aprendizaje

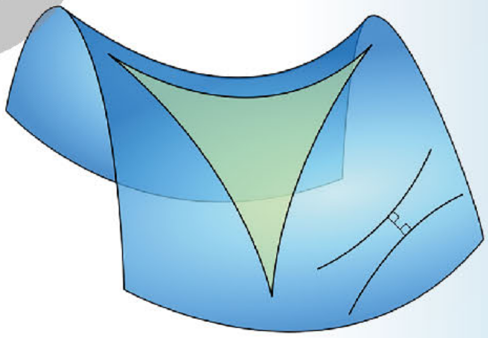
D. Ve al siguiente enlace, utiliza el modelo de Geogebra e investiga ¿Cuáles son las medidas mínimas y máximas de los ángulos internos de un triángulo esférico?

Geometría Hiperbólica

La geometría hiperbólica surge al modificar el quinto postulado de Euclides. En este sistema, por un punto exterior a una línea dada, pasan **infinitas líneas paralelas** a la original. Esto contrasta con la geometría euclidiana, donde existe sólo una paralela.

En la geometría hiperbólica, las propiedades y relaciones entre puntos, líneas y ángulos difieren notablemente:

- Los ángulos de un triángulo suman siempre menos de 180 grados.
- Las líneas parecen "curvarse" hacia fuera, y las figuras tienden a distorsionarse al expandirse hacia los bordes del espacio.
- No existen líneas rectas en el sentido euclidiano; más bien, se entienden como "geodésicas", es decir, las trayectorias más cortas entre dos puntos dentro del espacio curvo.



Esta geometría puede representarse en modelos visuales como el **modelo del disco de Poincaré** o el **modelo del semiplano hiperbólico**, que permiten visualizar estas propiedades únicas en un plano bidimensional.

La geometría hiperbólica tiene aplicaciones en diversas áreas, como la teoría de la **relatividad general**, el diseño de redes, la arquitectura, y la física teórica, donde ayuda a describir espacios curvos y no euclidianos.

¡SABÍAS QUÉ?...

Felix Candela, de nacionalidad española y mexicana, es uno de los arquitectos del siglo XX más reconocidos a nivel mundial por su uso de paraboloides hiperbólicos en arquitectura. En sus obras, exploró las posibilidades del concreto reforzado creando los famosos cascarones, elementos estructurales y de diseño que llegan a tener pocos centímetros de espesor. ¿Conoces alguna de sus obras?

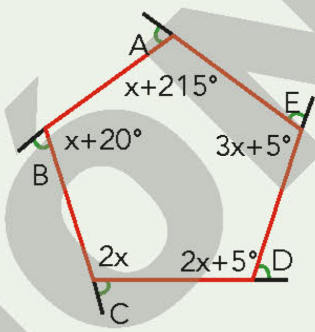
¡Has aceptado el reto, lee con atención y resuelve lo que se te pide!

Actividad de aprendizaje

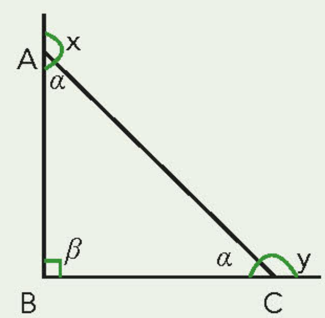
5E Elaborar

E. Resuelve los siguientes problemas.

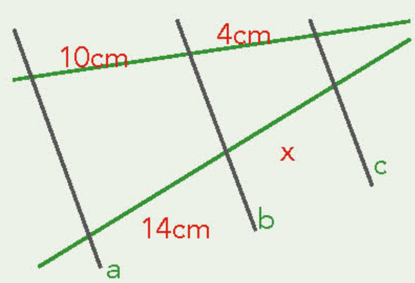
1. Encuentra el valor de x a partir del siguiente polígono irregular y escribe tu justificación.



2. Encuentra el valor de x y escribe tu justificación.



3. Sean a, b y c rectas paralelas, encuentra el valor de x y escribe tu justificación.



¡Felicidades por superar el reto! Han demostrado su habilidad para resolver problemas complejos usando la geometría, aplicando el conocimiento de manera brillante e innovador.

F. **Con los conocimientos adquiridos, responde a cada pregunta.**

Test de geometría Euclidiana y no Euclidiana

Escala de Respuestas:
Si: Manejo los conceptos con naturalidad y los puedo aplicar en situaciones reales. (3 puntos)
Regular: Entiendo los conceptos, más me cuesta aplicarlos para resolver problemas (2 puntos)
No: No entiendo los conceptos. (1 puntos)

1. ¿Sé aplicar los criterios y/o teoremas de la Geometría Euclidiana en la resolución de problemas?¿Entiendes las funciones de seno, coseno y tangente y como se utilizan?

   Si — Regular — No

2. ¿Sé reconocer los criterios y/o teoremas de la geometría euclidiana en la vida diaria?

   Si — Regular — No

3. ¿Entiendo por qué surgen las geometrías no Euclidianas?

   Si — Regular — No

Puntuación:
Suma tus respuestas y evalúa la comprensión de esta progresión:

8-9 Comprensión de geometría euclidiana óptima.
6-7 Comprensión de geometría euclidiana moderada, pero puede mejorar.
3-5 Comprensión de geometría euclidiana baja, considera tomar una asesoría

¿Cuál fue tu resultado?

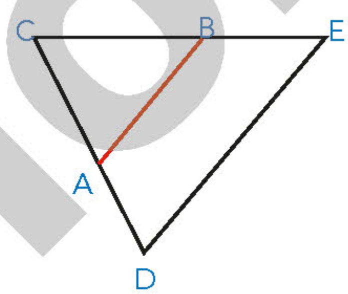
En equipos de 5 personas, comparen sus respuestas y discutan los temas que necesiten reforzar.

EVALUACIÓN SUMATIVA UNIDAD 1

A. Resuelve los siguientes problemas, utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad y escribe el procedimiento completo para llegar al resultado correcto.

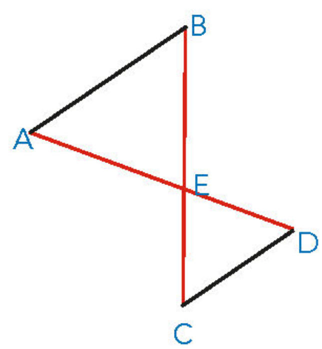
1. Si AB es paralelo a DE, demostrar que ΔABC es semejante a ΔDEC.

Si AC= 3, AD = 2 y AB = 4, calcula DE



2. Si AB es paralelo a CD, demostrar que ΔABE es semejante a ΔCED y establecer la razón de semejanza

Si CD= 3 m, EC = 4 m y EB = 12 m, calcula AB.



3. Determina qué tipo de triángulo es uno cuyos lados miden 12, 10 y 8 centímetros.

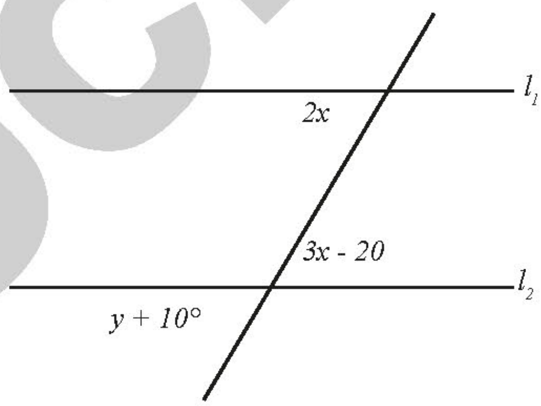
Justificación:

4. Si a es la hipotenusa y b y c los catetos de un triángulo rectángulo, calcula el lado que falta.

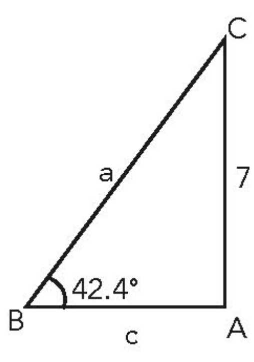
1. b = 10 cm y c = 6 cm
2. b = 30 cm y c = 40 cm
3. a = 32 m y c = 12 m
4. a = 32 m y c = 20 m
5. a = 100 m y b = 80 cm

5. Determina el valor de x y y

Justificación:



6. Obtén los valores para a y c de este triángulo rectángulo.



Unidad 1

ACTIVIDAD INTEGRADORA

Actividad en equipos de 4 integrantes:

A. Organicen un debate en clase, el docente fungirá como moderador, el tema será ***La Geometría,***

1. ¿Qué situaciones u observaciones empíricas podrían llevar a deducir alguno de los conceptos que se vieron en esta unidad? Escribe aquí tus conclusiones:

B. Investiga más respecto al tema, **Aplicaciones de la Geometría Euclidiana y no Euclidiana**

C. A partir de la investigación realizada, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la diferencia entre geometría euclidiana y no euclidiana?

2. ¿Cuál de las dos vemos más reflejada en nuestra vida diaria?

3. ¿Qué profesiones son las que más usan la geometría?

4. ¿Qué herramientas tecnológicas utilizan?

5. ¿Qué usos tiene la geometría no euclidiana?

Rúbrica para evaluar un debate

	NIVELES DE DESEMPEÑO			
	EXCELENTE	SATISFACTORIO	ELEMENTAL	INADECUADO
DEFENSA DE SUS ARGUMENTOS	Mantiene la defensa de su postura con argumentos variados y un dominio que le permita ser flexible e improvisa con bastante rigor.	Mantiene la defensa de su postura con variados argumentos y un dominio suficiente como para incorporar una idea no prevista.	La defensa se construye con argumentos obvios que demuestra que no ha habido un trabajo de campo previo.	Los argumentos guardan alguna relación, aunque están construidas de oídas y sin rigor.
DOMINIO DEL TEMA	Demuestra un trabajo previo evidenciando en un dominio total del tema, completamente interiorizado, y reflexionado que le permite hacer buenas valoraciones.	Demuestra un trabajo previo evidenciando un conocimiento del tema, aunque debe de seguir avanzando en las valoraciones y juicios críticos.	Demuestra un conocimiento básico del tema desde un punto de vista expositivo, quizá memorístico o reproductivo y sin aportaciones personales auténticas.	Demuestra un conocimiento básico que le permite participar en el debate.