Serie EXplora

PENSAMIENTO MATEMÁTICO I

EDGARDO CASTILLO GARRIDO

BlueBooks & Magnus

NEM
MCCEMS

PENSAMIENTO MATEMÁTICO I

Dirección Editorial: BB&M Academic

Diseño Gráfico: Jacobo González

Diseño de Portada: Montserrat Rosillo Cárdenas

Maquetación: Jacobo González

Revisión Técnica:

Dirección de Producción: Ricardo Cruz Flores

Autor: Edgardo Castillo Garrido

Edición: Martha Leticia Martínez De León

Imágenes: Dreamstime

ISBN: En trámite

55 1546 8351
55 49299516

contacto@bluebooksandmagnus.com
www.bluebooksandmagnus.com
ventas@bluebooks.com.mx

Impreso en México / Printed in México
Se terminó la impresión de esta obra en 2024
En los talleres de Fortaleza Gráfica S.A. de C.V.
Amado Nervo Mza. 11 Lte. 43 Col. Palmitas
Alcaldía Iztapalapa. C.P. 09670 Ciudad de México.

Contenido/ Progresiones

Introducción

PENSAMIENTO MATEMÁTICO I

Queridos Colegas Docentes y estimados estudiantes,

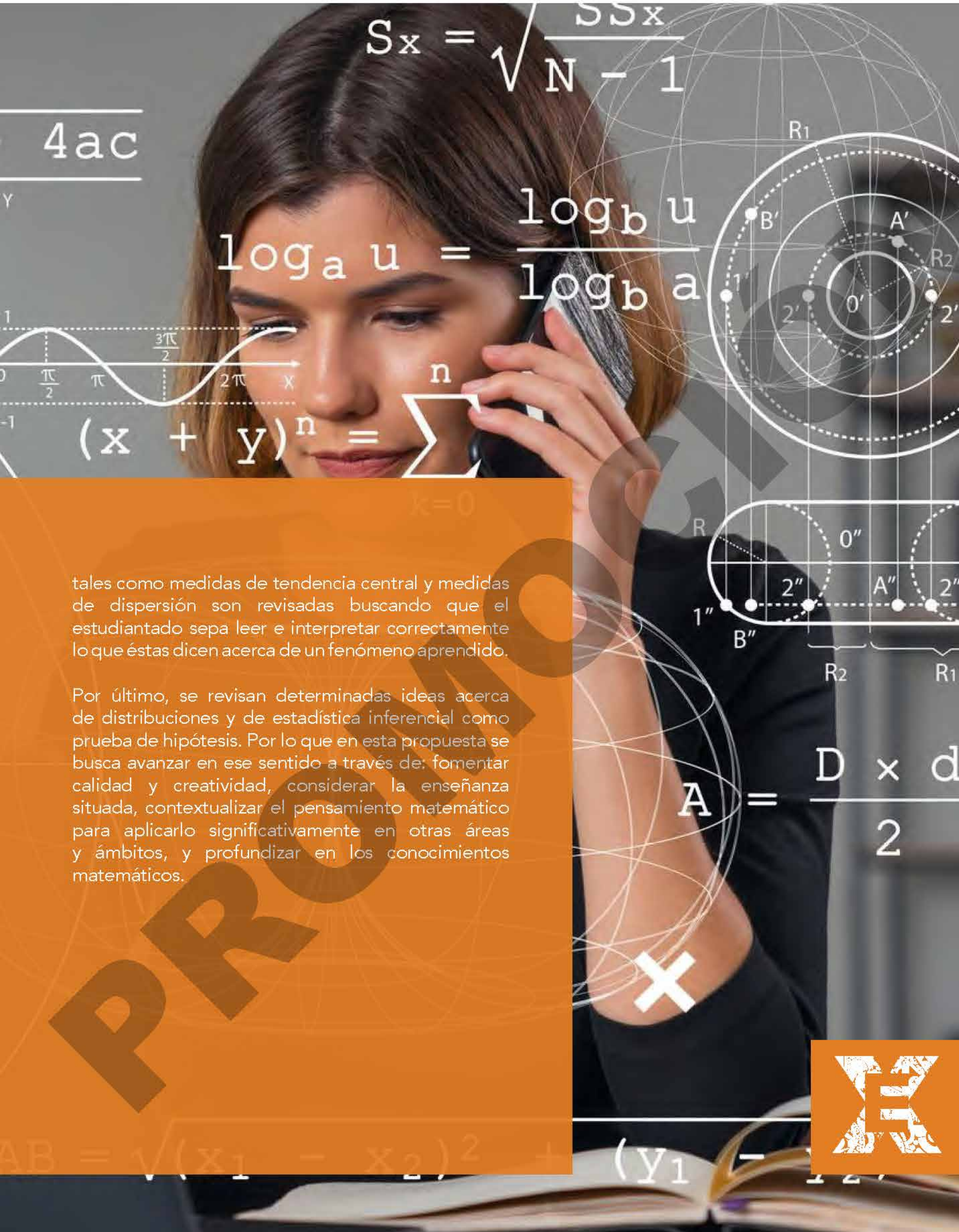
El Pensamiento Matemático es un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades cognitivas que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta abarcar procesos mentales abstractos que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar tanto conjeturas como argumentos y organizar, sustentar y comunicar sus ideas.

El pensamiento matemático además busca que los estudiantes del bachillerato logren comprender mejor otras áreas de conocimiento y la aplicación del mismo en la toma de decisiones razonadas y en la valoración de la matemática por su belleza, utilidad y como un factor fundamental en la creación de su proyecto de vida. Así se llevará al estudiantado del nivel medio superior a desarrollar procesos de razonamiento tanto lógicos como intuitivos, a desarrollar la creatividad y la imaginación, la curiosidad y la reflexión para fomentar el aprendizaje permanente.

En este libro aprenderás de manera gradual el desarrollo de las habilidades del pensamiento matemático, para esto se han elegido temas como algunos elementos disciplinares de la estadística y la probabilidad, el cual se da a través de la revisión de conceptos básicos: se comienza con la revisión de la variabilidad y cómo ésta hace necesario que busquemos cuantificar la incertidumbre.

Se llega a la definición de probabilidad teórica partiendo desde una perspectiva frecuencial. Para poder calcular la probabilidad de eventos aleatorios simples que se vuelven necesario para profundizar en las técnicas de conteo.

El concepto de probabilidad condicional es estudiado, con la posibilidad de llegar incluso a revisar el teorema de Bayes y sus aplicaciones en la actualidad. Se estudia la recolección de datos y su organización, teniendo en cuenta la naturaleza de la o las variables estudiadas. Se analiza la correlación entre variables cuantitativas aprovechando el momento para revisar algunas ideas sobre rectas en el plano. Ideas básicas de la estadística descriptiva



tales como medidas de tendencia central y medidas de dispersión son revisadas buscando que el estudiantado sepa leer e interpretar correctamente lo que éstas dicen acerca de un fenómeno aprendido.

Por último, se revisan determinadas ideas acerca de distribuciones y de estadística inferencial como prueba de hipótesis. Por lo que en esta propuesta se busca avanzar en ese sentido a través de: fomentar calidad y creatividad, considerar la enseñanza situada, contextualizar el pensamiento matemático para aplicarlo significativamente en otras áreas y ámbitos, y profundizar en los conocimientos matemáticos.

8 Principios de la Nueva Escuela Mexicana

NEM
MCCEMS

Fomentar la identidad con México

Favorece **el amor a la patria**, el aprecio de la **cultura**, **historia y valores** de nuestro país, **respetando** la **diversidad cultural y de pensamiento**.

Responsabilidad ciudadana

Impulsa el uso de **valores** y de los **derechos humanos** en pro del **desarrollo** del **individuo** y de la **comunidad**.

Honestidad

Se enfatiza este **valor** para **desarrollar** la **confianza** y la **congruencia** dentro de la comunidad.

Participación en la transformación de la sociedad

Trabajar de manera **conjunta** con los miembros de la comunidad y no sólo de la manera individual para la **resolución** de **problemas** comunes.

Respeto a la dignidad humana

Respetar, ejercer y promover los derechos humanos.

Interculturalidad

Fomentar el **reconocimiento, respeto y aprecio** por la **diversidad cultural y lingüística** que existe en nuestro país.

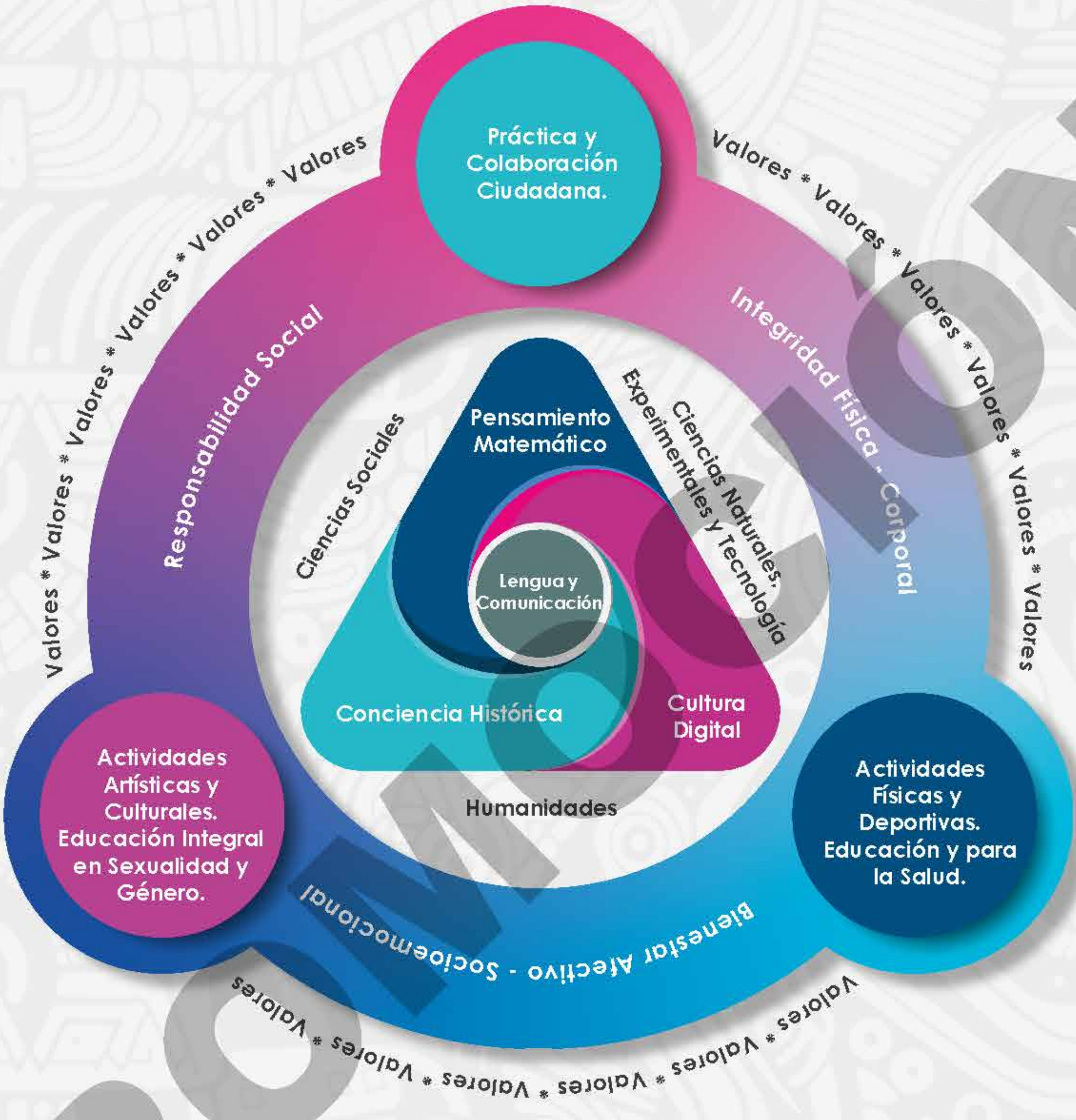
Cultura de la paz

Favorecer la resolución de conflictos mediante el **diálogo** constructivo que deriven en acuerdos y no a través de la violencia. Promover la solidaridad y la búsqueda de una **sociedad pacífica** con **desarrollo sostenible**, **inclusiva** y con **igualdad de oportunidades**.

Respeto a la naturaleza

Incentivar la **conciencia**, el **conocimiento**, la **protección** y **conservación** del entorno.

Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS)



Currículum Fundamental

Recursos Sociocognitivos:

- Lengua y comunicación
- Pensamiento matemático
- Conciencia histórica
- Cultura digital

Áreas de Conocimiento:

- Ciencias naturales, experimentales y tecnología
- Ciencias sociales
- Humanidades

Currículum Ampliado

Recursos Socioemocionales

- Responsabilidad social
- Cuidado físico corporal
- Bienestar emocional afectivo

Ámbitos de la Formación Socioemocional

- Práctica y colaboración ciudadana
- Educación integral en sexualidad y género
- Actividades físicas y deportivas
- Actividades artísticas y culturales
- Educación para la salud

Categorías, subcategorías, conceptos centrales y transversales

Metas de aprendizaje

Aprendizajes de trayectoria – Perfil de ingreso y egreso

Serie EXplora

¡Bienvenidos a bordo a nuestra experiencia de aprendizaje!

En esta emocionante travesía, hemos diseñado una secuencia didáctica que equipara el proceso de enseñanza-aprendizaje con un viaje inolvidable.
Al igual que en cualquier paseo, nuestro recorrido educativo consta de tres momentos fundamentales:

La fase de inicio "ABORDAJE"

La fase de desarrollo "TRAYECTORIA"

La fase de cierre "ATERRIZAJE"

BlueBooks & Magnus

MOMENTO 1 ↙ ABORDAJE
(INICIO)

Es la sección en la que nos alistamos para comenzar nuestro viaje educativo. Identificamos la progresión y comprendemos sus componentes.

Equipaje de mano

- Metas
- Categorías
- Subcategorías

Las 5E representan cinco fases clave en el proceso de aprendizaje.

Enganchar
Se busca captar el interés de los estudiantes y activar sus conocimientos previos mediante preguntas detonadoras, imágenes, videos o lecturas.

8 Principios de la Nueva Escuela Mexicana

NEM
MCCEMS

PASAPORTE DEL APRENDIZAJE

MOMENTO 2 TRAYECTORIA (DESARROLLO)

Aquí nos profundizamos en el corazón de la enseñanza y el aprendizaje. Esta fase es el núcleo de nuestro recorrido educativo, donde exploramos conceptos, practicamos habilidades y nos sumergimos en el conocimiento.

Explorar
Se crean situaciones de aprendizaje para que el estudiante active su conocimiento, investigando el tema, se fomenta el trabajo activo a través de actividades practicas, experimentos, observaciones, etc.

Explicar
Se tratan los contenidos de la progresión, se proporciona la base teórica para comprender los temas, se presenta informacion relevante, conceptos clave y explicaciones claras.

Elaborar
Los estudiantes aplican los conocimientos adquiridos y apropiados desarrollando habilidades mediante la elaboración de diferentes instrumentos que permiten profundizar y comprender el tema.

MOMENTO 3 ATERRIZAJE (CIERRE)

Es el momento de finalizar nuestro paseo educativo y asegurarnos de que todos los aprendizajes se consoliden. Aquí reflexionamos sobre lo aprendido, evaluamos nuestro progreso y nos preparamos para futuras aventuras educativas.

Evaluar
Por último, se evalúa el aprendizaje de los estudiantes para determinar si han alcanzado los objetivos de la progresión.

Recursos Educativos
- ¿SABÍAS QUÉ?...
- MOMENTO DE REFLEXIÓN
- TEMA INTEGRADOR
- TRANSVERSALIDAD

Recursos Socioemocionales
- CUIDADO FÍSICO CORPORAL
- BIENESTAR EMOCIONAL AFECTIVO
- RESPONSABILIDAD SOCIAL

Ámbitos de la Formación Socioemocional
- PRÁCTICA Y COLABORACIÓN CIUDADANA
- EDUCACIÓN INTEGRAL EN SEXUALIDAD Y GÉNERO
- ACTIVIDADES FÍSICAS Y DEPORTIVAS
- ACTIVIDADES ARTÍSTICAS Y CULTURALES
- EDUCACIÓN PARA LA SALUD

Unidad 1

Pensamiento estadístico y probabilístico

Progresión 1- Pensamiento estadístico y probabilístico

Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios y de problemáticas complejas que sean significativas para valorar la recolección de datos, su organización y la aleatoriedad.

Se busca llevar al estudiantado a que aprecie el poder de la matemática y el pensamiento estadístico y probabilístico. En este punto no se espera que se resuelvan las problemáticas abordadas.

Progresión 2 - Incertidumbre en eventos

Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de simulaciones considera la frecuencia con la que un evento aleatorio puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda.

Progresión 3 - Equiprobabilidad de un evento

Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica.

Progresión 4 - Técnicas de conteo

Elige una técnica de conteo (ordenaciones con repetición, ordenaciones, permutaciones, combinaciones) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y con ello generar una mayor conciencia en la toma de decisiones.

Las técnicas de conteo se introducen para entender la probabilidad de eventos aleatorios en los que la expresión explícita de su espacio muestral es poco factible.

Progresión 5 - Probabilidad condicional

Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales.

La introducción de la actualización de probabilidades se hace a través de simulaciones y sólo después se aborda el teorema de Bayes.

Equipaje de mano

Metas	Categorías	Subcategorías
M1.1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. (P1, P2, P5)	**C1.** Procedural (P3, P4)	**S1.1** Capacidad para observar y conjeturar (P1, P2, P5)
M1.2 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. (P3, P5)	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento (P1, P2, P5).	**S1.2** Elementos aritmético-algebraicos. (P3)
M1.3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto. (P3, P4, P5)	**C3.** Solución de problemas y modelación (P3, P4)	**S1.3** Uso de modelos. (P3, P4)
M1.4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural. (P3, P5).	**C4.** Interacción y lenguaje matemático (P3)	**S1.4** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. (P3)
M2.1 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación. (P2, P3, P5).		**S2.1** Pensamiento intuitivo. (P2)
M2.2 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. (P3, P4, P5).		**S2.2** Negociación de significados. (P3)
M 2.3 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno. (P3, P5)		**S2.3** Elementos geométricos. (P4)
M2.4 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. (P3, P5).		**S2.4** Construcción de modelos. (P4)
M 3.1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares. (P5)		**S3.1** Ambiente matemático de comunicación. (P3, P4, P5)
		S3.2 Pensamiento formal. (P4)
		S3.3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios. (P4)
		S4 Manejo de datos e incertidumbre (P3, P4, P5)

Evaluación Diagnóstica

Trabajo independiente: Resuelve la siguiente sopa de letras

G	V	X	Z	Y	S	E	N	O	I	C	I	T	E	P	E	R	N	E	M
X	É	O	R	G	A	N	I	Z	A	C	I	Ó	N	Ú	Í	É	M	D	V
E	H	X	G	E	S	P	A	C	I	O	M	U	E	S	T	R	A	L	E
P	Q	I	I	Ó	P	T	E	S	T	A	D	Í	S	T	I	C	A	N	É
E	M	U	Z	T	Ü	S	É	H	Y	Z	Ó	E	Ü	Y	U	Z	O	Ú	S
S	Á	O	I	O	O	N	E	C	Ñ	S	Ñ	Ñ	L	L	H	R	O	E	X
E	A	O	Ñ	P	T	D	Ú	N	N	P	A	Z	A	R	D	V	N	Ó	H
N	I	Á	J	A	R	N	Q	Á	O	I	Ñ	F	Á	E	A	O	A	S	V
O	N	T	A	L	Z	O	E	A	É	I	C	R	N	R	I	L	R	D	V
I	C	Z	F	E	F	F	B	V	Ú	P	C	A	I	S	Ñ	D	T	Y	R
C	E	Ñ	B	A	R	Ñ	J	A	E	T	C	A	I	V	Ó	P	S	O	E
A	R	Ü	B	T	A	E	B	T	B	I	B	C	N	Z	Z	Ú	E	E	C
T	T	Y	R	O	C	Ñ	C	Á	O	I	E	P	E	I	O	F	U	T	O
U	I	N	Ú	R	A	Í	S	N	L	D	L	H	N	E	B	B	M	N	L
M	D	Ó	Í	I	S	O	E	I	E	M	G	I	É	U	M	M	A	O	E
R	U	O	M	O	O	S	D	D	É	S	L	B	D	P	Ú	R	O	C	C
E	M	Y	Z	Í	Ó	A	A	É	Ñ	Y	O	D	Á	A	É	F	G	C	C
P	B	Ñ	G	B	D	M	A	O	B	Á	F	T	Ú	P	D	Ñ	E	I	I
A	R	R	K	J	O	D	A	D	I	L	I	B	A	B	O	R	P	M	Ó
G	E	M	F	T	I	D	Ú	H	F	B	Ú	P	X	D	Y	M	Z	S	N

PROBABILIDAD
ESTADÍSTICA
MUESTRA
EVENTO
RECOLECCIÓN
DATOS
ALEATORIO
AZAR
TOMA DE DECISIONES
ORGANIZACIÓN
PERMUTACIONES
COMBINACIONES
VARIABILIDAD
INCERTIDUMBRE
REPETICIONES
EQUIPROBABILIDAD
TÉCNICA
CONTEO
ORDENACIONES
ÉXITO
FRACASO
ESPACIO MUESTRAL

Progresión de aprendizaje 1

Pensamiento estadístico y probabilístico

Equipaje de mano

Metas
M1.1
Categorías
C2
Subcategorías
S1.1

ABORDAJE (INICIO)

Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios y de problemáticas complejas que sean significativas para valorar la recolección de datos, su organización y la aleatoriedad.

Se busca llevar al estudiantado a que aprecie el poder de la matemática y el pensamiento estadístico y probabilístico.
En este punto no se espera que se resuelvan las problemáticas abordadas.

5E Enganchar

Pensamiento estadístico y probabilístico

Actividad de aprendizaje

A. En equipos de cuatro integrantes responde la pregunta y genera una pequeña discusión donde argumentes tus ideas.

¿Te has preguntado por que cuando se contrata un seguro para un automóvil o motocicleta, el precio depende del tipo de vehículo (año y modelo) o de la edad de quien lo contrata?

Actividad de aprendizaje

A. En equipos de cuatro integrantes contesten la siguiente pregunta.

1. Investiga el precio de algunos seguros para automóviles y motos, cuando menos de cuatro tipos de autos y motocicletas, diferentes modelos y compañías de seguros

SEGURO PARA MOTOS

Motocicletas menos de 100cc	**$369.750**
Motocicletas entre los 100cc y 200cc	**$495.900***
Motocicletas más de 200 cc	**$559.050***
Motocarro, tricimoto o cuatriciclo	**$559.050***

Precio aproximado y el pago es mensual

Seguros para automóviles

¿Cuánto te ahorras comparando?

Este es el resultado de comparar el seguro para un automóvil Sentra Advance 14/1.8 CVT CVT129/ 128 4 PTS, modelo 2020, que circula en Cuajimalpa, Ciudad de México, y es conducido por un hombre de 40 años de edad.

Cobertura básica / CIFRAS EN PESOS

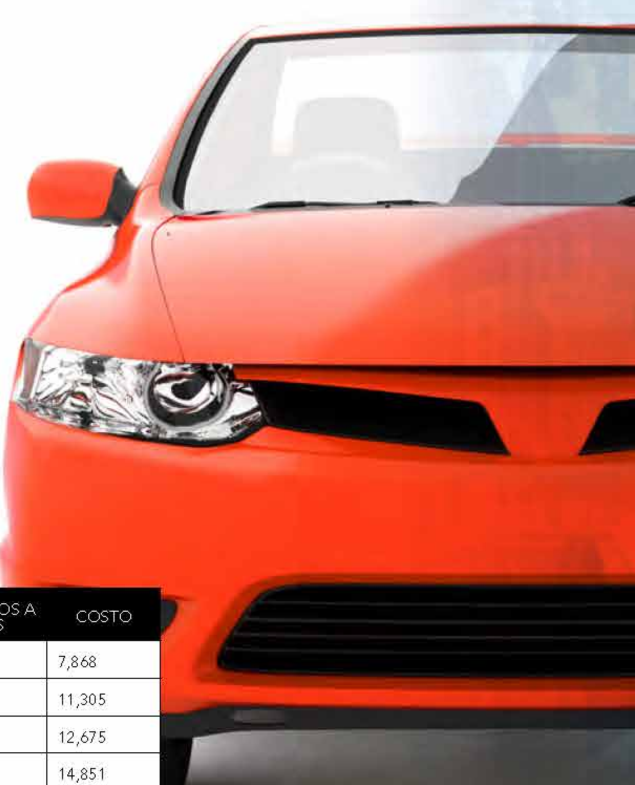
ASEGURADORAS	COBERTURA	GASTOS MÉDICOS A OCUPANTES (POR EVENTO)	COSTO
Banorte	4´000,000	150,000	3,714
General de Seguros	1´500,000	250,000	3,930
ANA	3´000,000	200,000	4,518
Quálitas	3´000,000	20,000	5,239
Zurich	3´000,000	200,000	5,498

Cobertura limitada / CIFRAS EN PESOS

ASEGURADORAS	ROBO TOTAL (SUMA ASEGURADA)	RESPONSABILIDAD CIVIL	GASTOS MÉDICOS A OCUPANTES	COSTO
General de Seguros	Valor comercial	1´500,000	250,000	5,523
Banorte	321,162	4´000,000	150,000	6,763
Quálitas	245,000	3´000,000	20,000	7,496
Zurich	307,300	3´000,000	200,000	8,081
ANA	Valor comercial	3´000,000	200,000	8,223

Cobertura amplia / CIFRAS EN PESOS

ASEGURADORAS	DAÑOS MATERIALES (SUMA ASEGURADA)	ROBO TOTAL	RESPONSABILIDAD CIVIL	GASTOS MÉDICOS A OCUPANTES	COSTO
Banorte	Valor comercial	Valor comercial	4´000,000	150,000	7,868
ANA	Valor comercial	Valor comercial	3´000,000	200,000	11,305
General de Seguros	Valor comercial	Valor comercial	1´500,000	250,000	12,675
Zurich	Valor comercial	Valor comercial	3´000,000	200,000	14,851
Quálitas	Valor comercial	Valor comercial	3´000,000	20,000	14,994



2. ¿Cuál es la cobertura que te da cada seguro?

3. ¿Porque difiere el precio entre compañías de seguros?

4. ¿Porque varía el precio dependiendo de la edad?

5. ¿Cuánto es la cantidad de dinero que te da un seguro por perdida material de un vehículo?

6. ¿Cuál es el monto de indemnización a tu familia si hay un siniestro y no sobrevives?

7. ¿Porque es importante para la ley que todos los vehículos motorizados cuenten con seguro de vida?

8. ¿Qué tiene que ver esto con el tema que se abordara en esta progresión?

Explicar

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

Toma de decisiones

Al inicio de cada día nos levantamos y comenzamos a pensar en todos los pendientes que tenemos, y es ahí donde empieza la toma de decisiones, desde bañarnos, elegir nuestra ropa, desayunar, comer o cenar, elegir la ruta más rápida para llegar a la escuela, al trabajo, y en cuanto comienza nuestra rutina, pensamos o tratamos de organizarnos para resolver los pendientes que tenemos y el nuevo trabajo o actividades que realizaremos. Sin embargo, el problema no termina, porque todos los días se repite el ciclo y hay que tomar más decisiones y conforme pasan los años, las responsabilidades son cada vez mayores, estudiar una carrera universitaria, ser emprendedor, o incorporarse al sector laboral, casarse o no, tener una familia propia, comprar o adoptar una mascota, comprar una casa, un auto, ropa, calzado, y cubrir las necesidades básicas para tratar de llevar una calidad de vida aceptable y acorde a nuestras posibilidades y capacidades, siempre tratando de predecir hechos o vernos a futuro como personas exitosas.

El origen de la probabilidad reside en la necesidad del ser humano de anticiparse a los hechos, y de predecir en cierta medida el futuro. Así, en su empeño por percibir patrones y conexiones en la realidad, se enfrentó constantemente al azar, o sea, a lo que carece de orden.

El importante y fascinante tema de la probabilidad comenzó en el siglo XVII con los esfuerzos de matemáticos como Fermat y Pascal en resolver preguntas relacionadas con los juegos del azar. Hasta el siglo XX se desarrolla una teoría matemática rigurosa basada sobre axiomas, definiciones y teoremas. Con el correr de los años, esta teoría encuentra su cauce en diversas ciencias o campos como ingeniería, ciencias, matemáticas, agricultura, la administración de empresas, la medicina y la psicología.

Pero ¿qué es la probabilidad y cómo se relaciona con la toma de decisiones?

El término probabilidad proviene de lo probable, o sea, de aquello que es más posible que ocurra, y se entiende como el mayor o menor grado de posibilidad de que un evento aleatorio ocurra, expresado en una cifra entre 1(un evento seguro de que suceda) y 0 (un evento imposible) o bien en porcentajes entre el 100% o el 0%, respectivamente.

Una forma empírica de estimar la probabilidad consiste en obtener la frecuencia con la que sucede un determinado acontecimiento mediante la repetición de experimentos aleatorios, bajo condiciones suficientemente estables. En algunos experimentos de los que se conocen todos los resultados posibles, las probabilidades de estos sucesos pueden ser calculadas de manera teórica, especialmente cuando todos los resultados son igualmente probables.

La teoría de la probabilidad es la rama de la matemática que estudia los experimentos o fenómenos aleatorios.

Una de las primeras aplicaciones de la probabilidad fue en las ciencias actuariales, que comprenden el estudio de seguros de vida, fondos de pensiones y problemas relacionados. Otro uso importante está en la estadística, la cual penetra en una multitud de campos, tales como finanzas, economía, biología, psicología y las ciencias sociales en general. También se emplea en la física y química modernas y en muchas ingenierías, por ejemplo, en la teoría de ajuste por mínimos cuadrados, en el estudio de problemas de aglomeración (problemas de tráfico), en la teoría de muestreo y en el control de calidad de productos manufacturados.

Un ejemplo de la toma de decisiones es cuando compras un automóvil o una motocicleta, como se te planteó en la actividad de enganche, y te preguntas, ¿qué tipo de seguro me conviene comprar y porque hay tantas empresas de seguros y tanta variabilidad de pólizas de seguros?

Las empresas dedicadas a vender seguros realizan investigaciones sobre seguros de vida y el riesgo potencial de que suceda un accidente vial, para esto ellos obtienen información de cuantos vehículos hay en una ciudad.

Ejemplo. En la CDMX, cuántos habitantes tienen un automóvil o motocicleta, rango de edades, sexo, el uso que le dan al automóvil o motocicleta, si será particular, taxi, mensajería, etcétera.

Una vez que se tiene esa información se le pregunta al cliente el tipo de seguro que necesita: cobertura parcial, total o un plus en donde el propio cliente elige una serie de opciones para enriquecer la cobertura de su seguro y dependiendo de esto es como se incrementará el costo del seguro; aquí intervienen varios factores como la referencia, cilindraje del motor, valor de la motocicleta o automóvil, perfil del cliente, ciudad de circulación y el índice de robo en la ciudad donde vives. En el mercado se encuentran muchas pólizas y existen algunas que resultan más favorables para el cliente, ya que no tienen en cuenta esos factores sino una tarifa fija independiente del vehículo. A esto se le suma si se cubre o no los accesorios, o de la marca del vehículo.

Aquí lo más importante es leer las cláusulas del seguro, porque después vienen los problemas al requerir en caso de un accidente vial y no te cubren todo lo prometido al momento de adquirir el seguro y el monto que te darán dependiendo de las pérdidas materiales como humanas.

Ejemplo. Al momento de tener un accidente vial, se realiza un peritaje, en el cual se hace el recuento de los daños, cómo fue, cuántos viajaban en el vehículo, si iban viajando niños en la parte delantera, quien manejaba, hombre o mujer y de qué edad, a qué velocidad fue el impacto, si ibas bajo el efecto de estupefacientes y un sinfín de preguntas y formularios por llenar, para que los del seguro se amparen en caso de pérdida total o parcial; si hubo decesos la situación se complica.

¿SABÍAS QUÉ?...

El 90% de las muertes por accidentes de tránsito ocurren en países de ingresos bajos y medios. Los accidentes de tráfico cuestan a los países alrededor del 3% de su PIB.Casi la mitad (49%) de las personas que mueren en las vías de tránsito del mundo son peatones, ciclistas y motociclistas, convirtiéndose en las principales víctimas fatales a causa del tránsito en todas las subregiones excepto Norteamérica, donde los ocupantes de los automóviles son las principales víctimas.

La posesión de un vehículo conlleva responsabilidades que van más allá de llenar el tanque de gasolina y seguir las señales de tráfico. Una de las interrogantes recurrentes entre los propietarios de vehículos es si es obligatorio tener un seguro de auto en México.

La respuesta es sí, es obligatorio tener un seguro de auto en México. Esta obligación se estableció en 2013, cuando se modificó la Ley de Caminos, Puentes y Autotransporte Federal.

Esta modificación legal fue un paso importante en la protección de los derechos y la seguridad de los usuarios de las carreteras mexicanas. Según esta ley, todos los vehículos motorizados que circulen por el país deben contar con un seguro de responsabilidad civil, comúnmente conocido como seguro de auto obligatorio.

Las multas por no tener un seguro de auto en México pueden variar ampliamente según la entidad federativa y la gravedad de la infracción. Estas multas suelen oscilar entre los 2,000 y 5,000 pesos mexicanos o incluso más, dependiendo de la jurisdicción y las circunstancias del caso; además de la multa, las autoridades de tránsito tienen la autoridad para inmovilizar y retener el vehículo en el lugar del incidente si se comprueba que el conductor no cuenta con un seguro de auto válido.

En muchos casos, las autoridades pueden retener la licencia de conducir del infractor hasta que presente pruebas de que ha adquirido un seguro de auto válido y en situaciones más graves, como un accidente automovilístico causado por un conductor sin seguro, las consecuencias legales pueden ser aún más severas. El conductor puede enfrentar demandas civiles por daños y perjuicios por parte de las víctimas del accidente, lo que podría resultar en costosos acuerdos o juicios.

3° Honestidad

MOMENTO DE REFLEXIÓN

Observa el siguiente video "3 puntos que ¡LAS ASEGURADORAS NO QUIEREN QUE SEPAS!" y reflexiona su contenido. Comenta con tus compañeros de clase.

https://www.youtube.com/watch?v=E5QccALTxXk

Trabajo independiente: Investiga un tipo de seguro, que te podría ayudar. Ejemplo. Un seguro de vida por accidente vial por viajar en trasporte público, un asalto o robo de pertenencias, un seguro para tu mascota, etcétera.

Elaborar

5E

Actividad de aprendizaje

Deberán colocar mínimo tres tipos de cobertura (total, parcial o VIP)

En el caso de seguros de automóvil: que cobertura ofrece, beneficios, monto total por perdida total o parcial del objeto asegurado, acompañamiento jurídico, asistencia de grúa, asistencia vial, gastos de hospitalización, daños a terceros, etcétera.

En el caso de seguros de hogar: beneficios por contratar el seguro, monto por pérdidas materiales en el caso de un robo a casa habitación, incendios causados por fallas en la conexión del gas o por falla eléctrica, inundaciones, rotura de cristales, robo a casa habitación, descargas eléctricas, responsabilidad civil doméstica, etcétera.

En el caso de celulares: Si el robo fue con o sin violencia, robo de identidad o de información personal, de cuentas en redes sociales, banca móvil en tu celular, información privada en el celular, etcétera.

En el caso del Seguro de Mascotas, si incluye gastos médicos veterinarios que cubren la atención de tu mascota en caso de accidente o enfermedad, brindándote respaldo en situaciones que requieran intervención quirúrgica, análisis de laboratorio, hospitalización etcétera.

Respuestas pueden variar

Escribir datos relevantes sobre robo de vehículos, a casa habitación de celulares y mascotas; decesos por accidentes viales al año, incendios en casa habitación ya sea provocados o por fallas en el sistema eléctrico o de gas.

Respuestas pueden variar

Cuáles son las consecuencias de no contar con un seguro, explica lo más detalladamente posible.

Respuestas pueden variar

Socializa tu investigación con tus compañeros de grupo y compara precios, cobertura y beneficios al adquirir un seguro. Escribe pro y contras al contratar uno.

Respuestas pueden variar

Evaluación continua y formativa

5E Evaluar

Tabla de niveles de desempeño del estudiante

Nivel de desempeño	Valoración de los criterios	Referencia numérica
A Destacado	Seis criterios demostrados	**10**
B Satisfactorio	Cinco criterios demostrados	**9**
C Suficiente	Cuatro criterios demostrados	**8**
	Tres criterios demostrados	**7**
D Requiere apoyo	Dos criterios demostrados o menos	**6**

Lista de cotejo para los ejercicios y problemas realizados

Propósito de la progresión:

Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios y de problemáticas complejas que sean significativas para valorar la recolección de datos, su organización y la aleatoriedad.

Se busca llevar al estudiantado a que aprecie el poder de la matemática y el pensamiento estadístico y probabilístico. En este punto no se espera que se resuelvan las problemáticas abordadas.

Objetivo:

Los estudiantes abordan problemáticas de ejemplos reales y ficticios haciendo solo el planteamiento del problema realizando discusiones con sus compañeros de grupo para proponer una solución

Criterios de evaluación	Sí	No
a) Los estudiantes están familiarizados con los conceptos aprendidos en esta primera progresión, y son capaces de dominarlos.	☐	☐
b) Los estudiantes plantean algún problema sobre probabilidad de manera individual en equipos o grupal, sin ayuda del profesor.	☐	☐
c) Los estudiantes trabajan en equipo y realizan correctamente su trabajo.	☐	☐
d) Contestan correctamente las preguntas formuladas por sus compañeros o por el profesor	☐	☐
e) Son capaces de proponer soluciones a los problemas planteados	☐	☐
f) Los estudiantes están familiarizados con los conceptos que aplicaron en esta progresión y son capaces de explicar ante el grupo una probable solución del problema planteado, dominando el tema y el lenguaje formal acorde a la materia de probabilidad y estadística.	☐	☐

Progresión de aprendizaje **2**

Incertidumbre en eventos

Equipaje de mano

Metas
M 1.1, M 2.1
Categorías
C2
Subcategorías
S1, S2

ABORDAJE
(INICIO)

5E Enganchar

Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de simulaciones considera la frecuencia con la que un evento aleatorio puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda.

A. En equipos de cuatro integrantes lean el siguiente artículo sobre el Huracán Otis. Reflexionen sobre este suceso y contesten las preguntas.

Huracán Otis

Fue el decimoquinto ciclón tropical de la temporada ciclónica del Pacífico de 2023. Se trató de un evento natural de dimensiones reducidas, pero de extraordinaria potencia y capacidad destructiva. Se considera el ciclón tropical más fuerte que ha tocado tierra en las costas del pacífico mexicano, y el primero en hacerlo como huracán de categoría 5 en la escala Saffir-Simpson, hizo su arribo a tierra el 24 de octubre de 2023 en las proximidades de Acapulco.

Las proyecciones iniciales auguraban que en su apogeo sería una tormenta tropical. Sin embargo, Otis experimentó una intensificación rápida, y alcanzó velocidades máximas del viento de 165 mph (270 km/h) e hizo aparición en tierra con dicha potencia. Tras su ingreso continental, la fuerza del huracán mermó con celeridad, desvaneciéndose en la jornada subsiguiente. Entre las consecuencias de Otis se encuentran al menos 47 decesos y 59 personas no localizadas. Hasta el 21 de diciembre de 2023, ninguna autoridad había dado un recuento o alguna cifra estimada de personas heridas.

Al efectuar su entrada ligeramente al oeste de Acapulco, los implacables vientos de Otis comprometieron la integridad de numerosas infraestructuras urbanas. Se registraron desprendimientos terrestres e inundaciones, como consecuencia de las precipitaciones intensas y sostenidas.

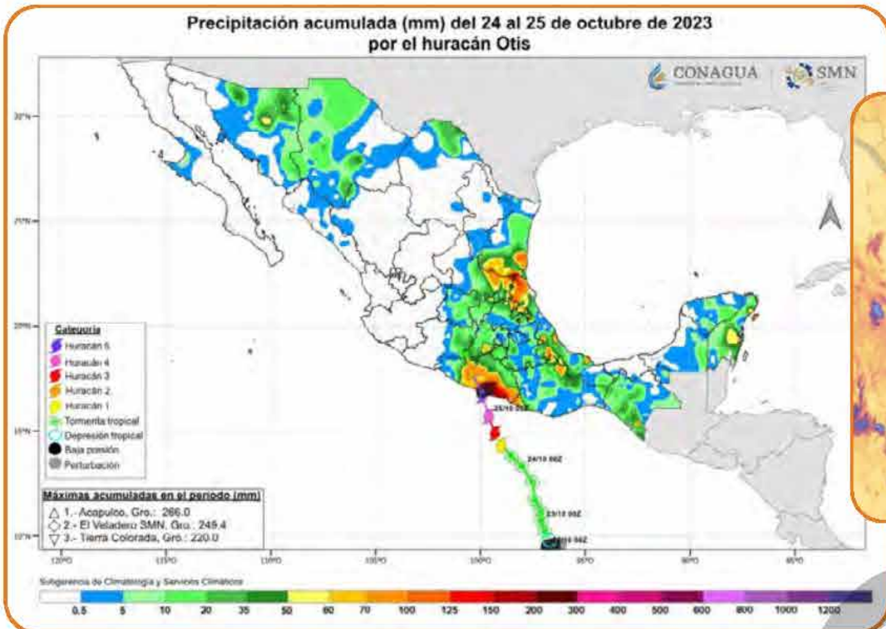
Los meteorólogos e investigadores del Centro de Vuelo Espacial Goddard de la NASA, dijeron que Otis tenía "todos los ingredientes adecuados, es decir, "había condiciones para una rápida intensificación, pero en ese momento era difícil predecir por qué la rapidez y la magnitud de la intensificación fueron tan grandes" mencionaron los especialistas.

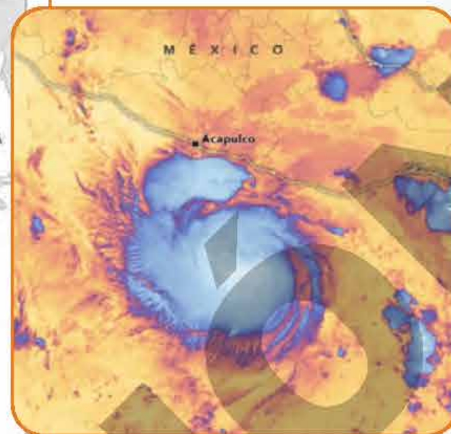
Error de predicción

La agudización extrema del fenómeno fue en gran medida inesperada: apenas 24 horas previas a que Otis alcanzase la categoría 5, el NHC anticipó una intensidad máxima de tan solo 70 mph (110 km/h). El rumbo previsto para el ciclón tropical no indicaba que este impactaría en el sur de México; por el contrario, desvió su trayectoria hacia el oeste, manteniéndolo en aguas abiertas. Posteriormente, el rumbo estimado se modificó para indicar que Otis haría contacto con tierra. Los modelos numéricos de predicción climatológica no lograron discernir adecuadamente la magnitud de la agudización fulminante que tuvo lugar, en parte a causa de la insuficiencia de datos (se efectuó únicamente un vuelo de Hurricane Hunters y no existe radar Doppler en la zona de impacto).

Algunas simulaciones de modelos no anticiparon el impacto terrestre en lo absoluto.

B. Contesta las siguientes preguntas con respecto al artículo leído.





1. ¿Cómo se describe al Huracán Otis en el artículo? ¿Cómo fue considerado según la escala Saffir-Simpson?

2. ¿En dónde causó mayor daño el Huracán Otis?

3. ¿Cuánta velocidad máxima alcanzaron los vientos generados por el Huracán en mph y en km/h?

4. ¿Cuáles fueron las consecuencias de Otis en lo que se refiere a pérdidas humanas y personas heridas?

5. ¿Qué dijeron los meteorólogos e investigadores del Centro de Vuelo Espacial Goddard de la NASA, acerca de Otis y su intensificación?

6. ¿Por qué los modelos numéricos de predicción climatológica y algunas simulaciones de modelos no anticiparon el impacto terrestre en lo absoluto, al momento de predecir si el huracán tocaría o no tierra?

5E Explorar

Actividad de aprendizaje

A. En equipos de cinco integrantes, Investiguen y contesten las siguientes preguntas

1. ¿Como se forma un huracán?

2. ¿Qué es la escala Saffir-Simpson?

3. ¿En cuánto haciende las perdidas socioeconómicas?

4. ¿Cómo se llevaron a cabo las operaciones de rescate después de que se disipo el huracán?, ¿cómo se reestableció el suministro eléctrico?

5. ¿Alguna vez has estado en medio de un Huracán o en algún otro desastre natural?, describe tu experiencia de manera detallada

MOMENTO DE REFLEXIÓN

1. Observa el siguiente video "Acapulco vive un infierno tras el huracán Otis" y reflexiona su contenido.

https://www.youtube.com/watch?v=8P7L4_LJesg

Explicar

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

La incertidumbre en un evento

Se refiere a la falta de certeza o predictibilidad en un evento o situación, y puede ser causada por la variabilidad en los datos o condiciones. En la actividad de enganche se habla acerca de cómo una tormenta tropical se pude convertir rápidamente en un huracán, como el de Acapulco y en el cual, aunque primero se dijo que solo era una tormenta tropical, en aproximadamente 24 horas se convirtió en un huracán de categoría 5 y devastó la ciudad.

A través de simulaciones, es posible considerar la frecuencia con la que un evento aleatorio puede ocurrir, lo que proporciona información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda, pero como se vio en el artículo sobre el huracán Otis, los modelos numéricos de predicción climatológica no lograron discernir adecuadamente la magnitud de la agudización fulminante que tuvo lugar, en parte a causa de la insuficiencia de datos y algunas simulaciones de modelos no anticiparon el impacto terrestre en lo absoluto.

Las simulaciones permiten modelar diferentes escenarios y calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento en función de múltiples variables y condiciones, lo que ayuda a tomar decisiones informadas en situaciones inciertas. Por eso en México se cuenta con la Secretaría de la Defensa Nacional, la cual puso en marcha el plan DN-III-E y el plan Marina de la SEMAR en su etapa de "Auxilio a la Población Civil" y el Plan GN-A. Sin embargo, hubo insuficiencia de instrumentos por parte del Ejército Mexicano para remover el lodo y los árboles derribados que obstruían las vías, dadas las intensas inundaciones y la acumulación de sedimentos.

En virtud de la inminente llegada del huracán Otis, las autoridades gubernamentales de Guerrero instauraron 396 albergues con el propósito de resguardar a los ciudadanos afectados por las intensas ráfagas y los estragos de las marejadas ciclónicas.
Sin embargo, aún así se vivió mucha tensión he incertidumbre por parte de los pobladores de Acapulco. Entonces, ¿Cómo podemos predecir o prevenir este tipo de desastres naturales como inundaciones, temblores o terremotos, tormentas tropicales o huracanes y tormentas de nieve u olas de calor que afectan nuestro diario acontecer en diferentes épocas del año?

La probabilidad se utiliza para definir el cálculo matemático que establece todas las posibilidades existentes de que ocurra un fenómeno en determinadas circunstancias de azar. La probabilidad se calcula con base en un valor entre 0 y 1 y el nivel de certidumbre viene determinado por la cercanía a la unidad; por el contrario, en caso de que se aproxime al cero, hay menos seguridad en el resultado final.

¿SABÍAS QUE?...

Los juegos de azar han sido una parte intrincada de la cultura y el entretenimiento humano durante siglos. Desde los juegos de dados en la Roma antigua hasta los modernos casinos en línea, el juego ha evolucionado y se han diversificado a lo largo del tiempo

Todos estamos familiarizados con la importancia de los experimentos en la ciencia y en la ingeniería; Un principio fundamental es que si efectuamos tales experimentos repetidamente bajo condiciones aproximadamente idénticas obtenemos resultados que son esencialmente los mismos. Sin embargo, hay experimentos en los cuales los resultados no son esencialmente los mismos a pesar de que las condiciones sean aproximadamente idénticas. Tales experimentos se denominan experimentos aleatorios.

Ejemplos:

1. Si lanzamos una moneda el resultado del experimento es un "sol", simbolizado por S *(ó 0)*, o un "águila", simbolizada por A *(ó 1)*, es decir, uno de los elementos del conjunto $\{S,A\}$ ó $\{0,1\}$

2. Si lanzamos un dado el resultado del experimento es uno de los números en el conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$.

3. Si lanzamos una moneda dos veces, el resultado puede indicarse por *{SS, SA, AS, AA}*, es decir, dos soles, sol la primera y águila la segunda, etcétera.

4. Si tenemos una máquina que produce tuercas, el resultado del experimento es que algunos pueden estar defectuosos. Así cuando se produce una tuerca será un miembro del conjunto *{defectuoso,no defectuoso}*.

5. Si un experimento consiste en medir "la vida" de los focos ahorradores producidas por una compañía, el resultado del experimento es el tiempo t en horas que se encuentra en algún intervalo. **Ejemplo.** $0 \leq t \leq 5000$, donde suponemos que ningún foco ahorrador dura más de *5000 horas*.

Espacios muestrales

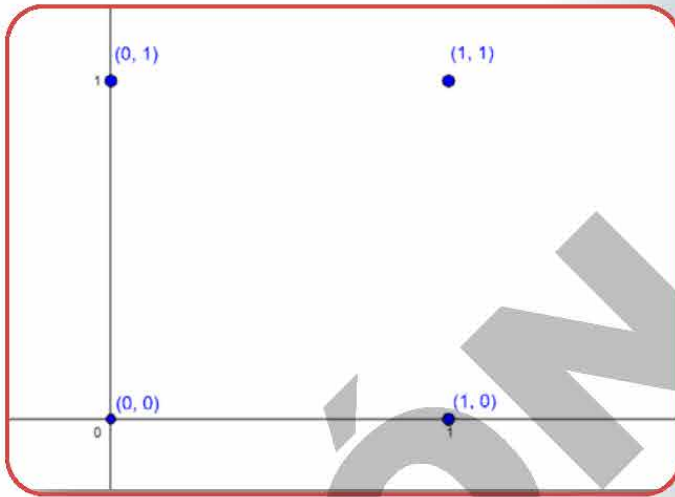
Un conjunto ξ *(letra griega Xi)* que consiste en todos los resultados de un experimento aleatorio se llama un espacio muestral y un resultado partículas, un elemento de ξ, se denomina punto muestral, con frecuencia habrá más de un espacio que describe los resultados de un experimento, pero hay comúnmente sólo uno que suministra la mayoría de la información. Observe que ξ corresponde al conjunto universal.

Ejemplo.

6. Si lanzamos un dado, un espacio o conjunto muestral de todos los resultados posibles se da *{1,2,3,4,5,6}* y el espacio muestral consta de 6 elementos, en tanto que otro es *{par, impar}* que constaría de dos elementos. Sin embargo, es lógico que el último no sería adecuado para determinar, si un resultado es divisible por 3.

Frecuentemente es útil dibujar un espacio muestral gráficamente. En tal caso es deseable utilizar números en lugar de letras siempre y cuando sea posible.

7. Si lanzamos una moneda dos veces y utilizamos 0 para representar soles y 1 para representar águilas, el espacio muestral (véase ejemplo) puede dibujarse por puntos en el plano cartesiano donde, (0,1) representa sol en el primer lanzamiento y águila en el segundo lanzamiento, es decir, SA, etcétera.



Si un espacio muestral tiene un número finito de puntos, como en el ejemplo 7 se denomina espacio muestral finito. Si tiene puntos como números naturales 1,2,3,...,∞ se denomina espacio muestral infinito contable. Si tiene tantos puntos como hay en algún intervalo en el eje x, tal como $0 \leq x \leq 1$ se denomina espacio muestral infinito no contable. Un espacio muestral que es finito o infinito contable se denomina espacio muestral discreto, en tanto que uno que es infinito no contable se llama espacio muestral continuo o no discreto.

Esto está relacionado con las variables discretas y continuas.

- Una variable es un símbolo. **Ejemplo,** X,Y,H,X o B, que puede tomar cualquiera de los valores de determinado conjunto al que se le conoce como dominio de la variable.
- A una variable que sólo puede tomar un valor se le llama constante.
- Una variable que puede tomar cualquiera de los valores entre dos números dados es una variable continua; de lo contrario es una variable discreta.

Ejemplos:

8. La cantidad N de hijos que tiene una familia puede tomar los valores *0,1,2,3,...*, pero no puede tomar valores como *2.5* o *3.842*; ésta es una variable discreta.

9. La estatura H de una persona que puede ser *1.60 m,1.63 m* o *1.65 m*, dependiendo de la exactitud con que se mida, es una variable continua.

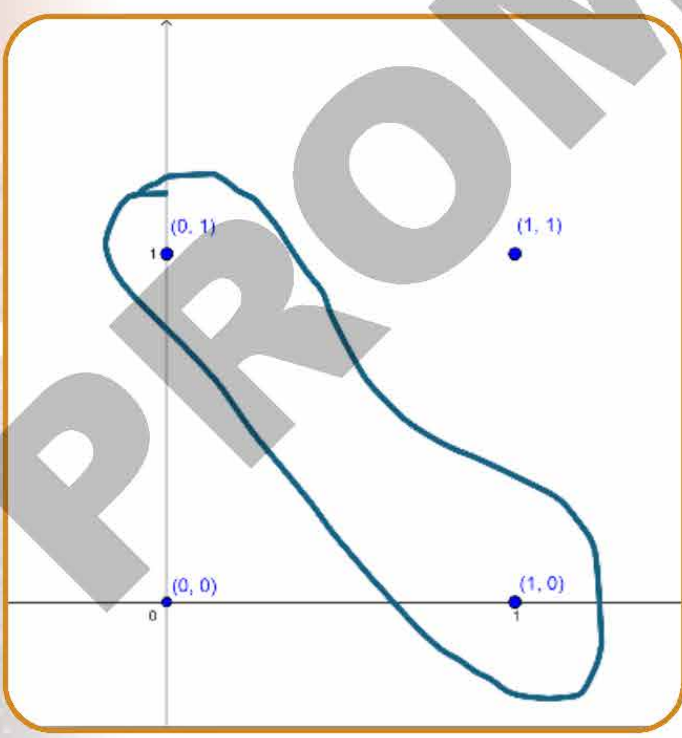
Los datos descritos mediante una variable discreta son discretos y los *descritos* mediante una variable continua son continuos. Un ejemplo es la cantidad de hijos que tiene cada una de 1 000 familias, en tanto los datos continuos son las estaturas de 100 estudiantes universitarios. En general, una medición proporciona datos continuos; en cambio, una *enumeración* o un *conteo* provee datos discretos.

Eventos

Un evento A es un conjunto de resultados o, en otras palabras, un subconjunto del espacio muestral ξ. En particular, el conjunto $\{a\}$ que consta de un punto muestral a $\emptyset\,\xi$ se denomina evento elemental. Además, el conjunto vacío $\emptyset$ y ξ mismo son subconjuntos de ξ y $\emptyset$ y ξ también son eventos. Como sucesos particulares tenemos el suceso en sí mismo. que es el suceso cierto o seguro ya que un elemento de ξ debe ocurrir, y al conjunto vacío $\emptyset$ se le llama evento imposible o evento nulo a $\emptyset$, puesto que un elemento del $\emptyset$ no puede ocurrir.

Ejemplo.

10. Si lanzamos una moneda dos veces, el evento que sólo resulte un sol es el subconjunto del espacio muestral que consiste en los puntos *(0, 1)* y *(1, 0)*, y el espacio muestral consta de dos elementos, como se indica en la siguiente figura.



Puesto que un evento es un conjunto, es posible combinar acontecimientos para formar nuevos eventos al usar las diversas operaciones con conjuntos:

i) $A \cup B$ es el evento que ocurre si y solo si A ocurre o B ocurre (o ambos).

ii) $A \cap B$ es el evento que ocurre si y solo si A ocurre y B ocurre.

iii) A^c, el complemento de A, también se escribe A es el evento que ocurre si no ocurre A.

iv) A-B es el evento que ocurra A pero no B.

Dos eventos A y B se denominan mutuamente excluyentes si son ajenos; es decir, si $A \cap B = \emptyset$. En otras palabras, A y B son mutuamente excluyentes si y sólo si no pueden ocurrir simultáneamente. Tres o más eventos son mutuamente excluyentes si dos de ellos son mutuamente excluyentes.

Ejemplo.

11. Haciendo referencia al experimento de lanzar una moneda dos veces sea A (sol) y B (águila) el evento.

Entonces $A{:}\{SA,AS,SS\}, B{:}\{SA,AA\}$ así tenemos:

$A \cup B{:}\ \{SA,AS,SS,AA\}=\xi$
$A \cap B{:}\{SA\}$
$A^c\ \{AA\}$
$A\text{-}B{:}\{SA,SS\}$

Actividad de aprendizaje

Trabajo independiente: Resuelve los siguientes ejercicios

1. Si lanzamos dos monedas, ¿el resultado del experimento cuál sería? Escríbelo como símbolos y como pares de números.

Solución:

2. Si lanzamos dos dados en el resultado del experimento, ¿cuáles serían los números en el conjunto?

Solución:

3. Si lanzamos una moneda tres veces, ¿el resultado del experimento cuál sería? Escríbelo como símbolos y como tríadas de números.

Solución:

4. Si tenemos una máquina que produce tornillos, el resultado del experimento. ¿Cuál sería? ¿Cuáles son los miembros del conjunto?

Solución:

5. Si un experimento muestra que "la vida media" de las pantallas producidas por una compañía, es de aproximadamente cinco años, el resultado del experimento es el tiempo t en horas. Escribir el intervalo en horas en el que se encuentra la vida media de las pantallas y cuanto sería el tiempo máximo en horas que durarían las pantallas con ese tiempo.

Solución:

6. En cada uno de los casos siguientes indíquese si se trata de datos continuos o discretos:

a) Cantidad de acciones que se venden diariamente en la bolsa de valores. ____________________

b) Temperatura registrada cada media hora en un observatorio. ____________________

c) Vida media de los celulares producidos por una empresa. ____________________

d) Ingreso anual de los profesores de la preparatoria. ____________________

e) Longitud de 100 pernos producidos en una fábrica ____________________

7. Si lanzamos una moneda dos veces, el evento que sólo resulte dos soles o dos águilas el subconjunto del espacio muestral, ¿De cuáles puntos en el plano cartesiano consisten?. Hacer la representación gráfica; ¿el espacio muestral de cuantos elementos constaría y cuáles son?

Solución:

Actividad de aprendizaje

Elaborar 5E

En equipos de cuatro integrantes realicen los siguientes experimentos.

8. Experimento 1

Lance tres monedas y observe la sucesión de soles *(S)* y Águilas *(A)* que se obtiene.

Es decir, cual es el espacio muestral y cuantos elementos tiene.

Sea A el evento de obtener dos o más soles consecutivos y el evento B que todos los resultados sean iguales. Escriba los elementos del conjunto A y conjunto B y cuántos elementos tiene cada evento muestral.

Encontrar $A \cup B$, $A \cap B$, A^c y A-B.

Mencionar dos eventos vacíos.

Solución:

8. Experimento: 2

Lance un dado (de seis caras), y observe el número (de puntos) que aparece en la cara superior.

¿Cuál es el espacio muestral ξ de este experimento?

Sea A el evento en el que se observa un número par, B el evento en el que se observa un número impar y C el evento en el que se observa un número primo.

Escriba los eventos muestrales de cada conjunto y menciona cuántos elementos tiene cada conjunto.

Encontrar: $A \cup B$, AUC, BUC, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, A^c,C^c, B^c, y A-B,A-C,B-C.

Menciona si existen eventos mutuamente excluyentes, si hay números pares o primos, si existe un evento donde hay un número primo impar o si no surge ningún número primo.

Solución:

9. Experimento: 3

Lanza una moneda hasta que aparezca una cara y cuente el número de veces que se lanzó la moneda. Repita el experimento al menos 10 veces ¿Cuál es el espacio muestral ξ de este experimento? ¿El espacio muestral de este experimento es finito o infinito? Argumenta tu respuesta.

Solución:

Evaluación continua y formativa

Evaluar 5E

Tabla de niveles de desempeño del estudiante

Nivel de desempeño	Valoración de los criterios	Referencia numérica
A Destacado	Cinco criterios demostrados	**10**
B Satisfactorio	Cuatro criterios demostrados	**9**
C Suficiente	Tres criterios demostrados	**8**
	Dos criterios demostrados	**7**
D Requiere apoyo	Un criterio demostrado	**6**

Lista de cotejo para los ejercicios y problemas realizados

Propósito de la progresión:

Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de simulaciones considera la frecuencia con la que un evento aleatorio puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda.

Objetivo:

Los estudiantes resuelven problemas de variabilidad y la frecuencia con la que un evento sucede en cada ejercicio.

Criterios de evaluación	Sí	No
a) Los estudiantes comprenden el tema de variabilidad y frecuencia de un evento y aplican los conocimientos adquiridos al resolver los ejercicios planteados.	☐	☐
b) Los estudiantes son capaces de aplicar las definiciones variabilidad y frecuencia de eventos, para resolver los ejercicios que se les pide.	☐	☐
c) Los estudiantes resuelven los problemas sobre variabilidad y frecuencia de un evento, en colaboración con sus compañeros y sin ayuda del profesor.	☐	☐
d) Los estudiantes trabajan en equipo para realizar correctamente el trabajo que se les pide.	☐	☐
e) Los estudiantes llegan al resultado correcto.	☐	☐

Progresión de aprendizaje **3**

Equiprobabilidad de un evento

Equipaje de mano

Metas
M 1.2, M 1.3, M1.4
Categorías
C1, C3, C4
Subcategorías
S1, S4, S5

ABORDAJE
(INICIO)

Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica.

5E Enganchar

Equiprobabilidad de un evento

A. En equipos de cuatro integrantes observen el video, respondan las preguntas a través de un dialogo en donde argumenten sus ideas.

1. ¿Por qué se llevó a cabo una investigación, cuando lesionaron al jugador del Boca Juniors?

2. ¿Las apuestas ilegales suceden solo en el futbol se aplica en cualquier deporte y quienes podrían estar implicados en este tipo de apuestas?

3. ¿Como ha regulado España este tipo de casas de apuestas deportivas?

4. ¿En Latinoamérica pasa lo mismo con estas leyes como en España, acerca de las casas de apuestas deportivas?

5. ¿Alguna vez te has preguntado por que últimamente hay muchas casas de apuestas deportivas en línea y cuál es la probabilidad que tienes de ganar en ese tipo de casas de apuesta?

Explorar

5E

Actividad de aprendizaje

A. En equipos de cinco integrantes, contesten las siguientes preguntas

1. ¿Qué es una casa de apuestas deportivas en línea?

2. Menciona al menos cinco casas de apuestas en línea

3. ¿Quiénes pueden jugar en este tipo de casas de apuestas?

4. ¿Cuánto es el límite que puedes ganar o apostar en estas casas de apuestas?

5. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la ruleta francesa por ejemplo?

1. Observa el siguiente video "EL SECRETO de los partidos arreglados en las apuestas deportivas" y reflexiona su contenido.

https://www.youtube.com/watch?v=kEjIvayTvJg

5E Explicar

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

El concepto de probabilidad

En cualquier experimento aleatorio siempre hay incertidumbre sobre si un suceso específico ocurrirá o no. Como medida de la oportunidad o probabilidad con la que podemos esperar que ocurra es conveniente asignar un número entre 0 y 1. Si estamos seguros de que el suceso ocurrirá decimos que su probabilidad es 100% ó 1, pero si aseguramos lo contrario decimos que su probabilidad es cero.

Ejemplo. Si la probabilidad es de 1/4, diríamos que hay un 25 % de oportunidad de que ocurra y un 75 % de que no ocurra. Equivale a decir que la probabilidad contra su ocurrencia es del 75 % al % o de 3 a 1.

Existen dos procedimientos importantes por medio de los cuales podemos obtener estimativos para la probabilidad de un suceso.

Enfoque clásico o a priori: Si un suceso puede ocurrir en h maneras diferentes de un número total de n maneras posibles, todos igualmente factibles, entonces, la probabilidad del suceso es h/n.

Ejemplo:
Supóngase que deseamos la probabilidad de que resulte una cara en un sólo lanzamiento de una moneda. Puesto que hay dos maneras igualmente factibles del resultado de la moneda, simplemente "sol" y "águila" (suponiendo que la moneda no se pierda ni caiga verticalmente), y de estas dos maneras una cara puede aparecer en una sola, razonamos que la probabilidad requerida es 1/2. Al llegar a este resultado suponemos que la moneda no ha sido manipulada o alterada en su forma original.

Enfoque como frecuencia relativa o a posteriori: Si después de $\boldsymbol{n}$ repeticiones de un experimento, donde $\boldsymbol{n}$ es muy grande, un suceso ocurre $\boldsymbol{h}$ veces, entonces, la probabilidad del suceso es $\boldsymbol{h/n}$. Esto se llama la probabilidad empírica del suceso.

Ejemplo.
Si lanzamos una moneda 1000 veces y hallamos que 532 veces resultan soles estimamos que la probabilidad de un sol es $532/1000 = 0.632$.

Ambos enfoques el clásico y el de frecuencia presentan serias dificultades, el primero debido a la vaguedad de las palabras "igualmente factibles" y el segundo debido a la vaguedad incluida en un "número muy grande". A causa de estas dificultades los matemáticos en los últimos años se han orientado a un enfoque axiomático utilizando conjuntos.

La equiprobabilidad se refiere a la situación en la que todos los eventos posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Ejemplos.

- **Lanzamiento de una moneda justa:** Cuando lanzas una moneda justa, la probabilidad de que salga cara es igual a la probabilidad de que salga cruz. Ambos eventos tienen una probabilidad de 1/2 o 0.5.
- **Lanzamiento de un dado:** Si lanzas un dado regular de seis caras, la probabilidad de que salga cualquier número del 1 al 6 es la misma, es decir, 1/6 o aproximadamente 0.1667.
- **Sacar una carta de una baraja bien mezclada:** Si tienes una baraja estándar de 52 cartas y la mezclas, la probabilidad de sacar cualquier carta específica es 1/52, ya que todas son igualmente probables.
- **Elegir un número al azar entre 1 y 100:** Si tienes que elegir un número al azar entre 1 y 100, cada número tiene la misma probabilidad de ser elegido, es decir, 1/100 o 0.01.

En estos ejemplos, cada resultado tiene la misma probabilidad de ocurrir, lo que demuestra la equiprobabilidad. Un modelo matemático probabilístico de fenómenos aleatorios se define al asignar "probabilidades" a todos los resultados posibles de un experimento. La confiabilidad del modelo matemático de un experimento depende de la proximidad que tengan las probabilidades asignadas con las frecuencias relativas limitantes reales.

Definición clásica

Imagina que un evento E puede ocurrir en h de n maneras igualmente posibles. Entonces, la probabilidad de que ocurra el evento (a la que se le llama éxito) se denota como:

$$p = P(E) = \frac{h}{n}$$

La probabilidad de que no ocurra el evento (a la que se le llama fracaso) se denota como

$$q = P(no\ E) = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - p = 1 - P(E)$$

Por lo tanto, $p + q = 1$ o bien $P(E) + P(no\ E) = 1$. El evento "*no E*" suele denotarse $\bar{E}$ o $\hat{E}$ o bien $\sim E$.

Ejemplo.

Cuando se lanza un dado, éste puede caer de seis maneras distintas, 1, 2, 3, 4, 5, o 6

Un evento E de que caiga 4 o 5 es: que caiga 4 o 5 y la probabilidad de E es $P(E)=2/6$ o bien $1/3$.
La probabilidad de no obtener dichos números, (es decir, la probabilidad de obtener $1,2,3$ o bien,

6) es $P(E) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Obsérvese que la probabilidad de un evento es un número entre 0 y 1. Si el evento no puede ocurrir, sus probabilidad es 0. En cambio, si se trata de un evento es seguro que ocurra, porque su probabilidad es 1. Si p es la probabilidad de que ocurra un evento, las posibilidades u oportunidades a favor de su ocurrencia son $p : q$ (que se lee "p *a* q"); las posibilidades en contra de que ocurra son $q{:}p$. Por lo tanto, las posibilidades en contra de que en un solo lanzamiento caiga un 4 o un 5 son:

$q : p = \frac{2}{3}:\frac{1}{3} = 2 : 1$ (es decir, 2 a 1).

Al inicio de la progresión preguntamos acerca de las casas de apuestas deportivas en línea, y de la manera en cómo han proliferado, además de saber cuál es la probabilidad de ganar en este tipo de casas de apuestas.

Ahora podemos dar la respuesta:

La emoción no entiende de lógica, pero las apuestas sí entienden de cálculo de probabilidades y eso es lo que ellos hacen para nunca perder y siempre ganar, además de las cuotas o probabilidades asignadas a cada tipo de evento deportivo, siempre le dan menor cuota al que tiene más probabilidades de ganar.

Ejemplo.
En un encuentro de futbol soccer, si se enfrenta el primer lugar de la tabla general contra el último, le darán una cuota más alta a este último, pero aparte de eso, la casa de apuestas te cobra una comisión que puede variar desde el 4% hasta 10% por jugar en su aplicación, es decir, te pagan menos de la cuota asignada porque ya te incluye el cobro de comisión.

¿Como se calcula la probabilidad, cuota o momio de cada evento deportivo?

Se calcula a través de la inversa de la probabilidad asignada en la cuota.

Ejemplo.
Si la cuota tiene 1.72 entonces la probabilidad seria:

$$Cuota = \frac{1}{probabilidad}$$

$$Cuota = \frac{1}{1.72} = 0.58$$

Y al multiplicarlo por 100% se obtiene la probabilidad en porcentaje:

$$\mathbf{0.58 \times 100\% = 58\%}$$

Pero las cuotas varían conforme avanza el partido y las apuestas realizadas durante el juego. Se crea un bote y se van ajustando las cuotas, pero el bote recauda de manera general por cada apuesta, y aparte se está generando un bote por apuesta, para al final repartir el dinero en caso de que gane uno de los resultados, es decir, se ajusta con base a los resultados y no al cálculo de la estimación inicial de la probabilidad; por eso la casa de apuestas ajusta las cuotas para poder pagar y nunca perder dinero.

¿Por qué las casas de apuestas cobran una comisión cuando ganes, pierdas o empates?
¿Qué es el overround?

Ellos meten una comisión a cada cuota, es decir, te cobran la comisión y te pagan menos de la probabilidad y esto se obtiene porque siempre hay un excedente del 100%, es decir, la suma de las cuotas debería de dar 100%, pero esto no pasa en estos casos. A este excedente se le llama overrround.

¿Cuál es la fórmula para saber cuánto te están pagando cuando ganas al apostar a una cuota?

Esperanza matemática *(EM)* o probabilidad *(P(E))* = *Probabilidad de ganar (P(E))* por el beneficio *(B)* menos la Probabilidad de perder *(P(no E))* por la pérdida *(Pe)*, y como una expresión matemática quedaría como:

$$EM=P(E)\cdot B-P(no\ E)\cdot P$$

Es decir, que tu probabilidad a la larga siempre será perdedora y nunca ganadora, es decir, entre más apuestas pierdes, aun cuando ganes algunas veces, por eso, la casa de apuestas nunca pierde.

A continuación, mostramos la solución de los problemas planteados al inicio de esta progresión.

Ejemplos:

1. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la ruleta francesa?

Solución:

El juego de la ruleta francesa tiene 37 números, del 0 al 36. Por eso, la probabilidad de que salga tu número es $P(E)=1/37$, y de que salga cualquier otro es $P(no\ E)=36/37$. Suponiendo que los casinos pagan las apuestas a un solo número a razón de B=35 pesos por peso apostado.

Imagina que apuestas un peso *(P)* a tu número favorito, tu esperanza matemática o probabilidad se calcularía multiplicando los 35 pesos que puedes obtener por *1/37*, pero habrá que añadir el peso que puedes perder multiplicado por 36/37. De ahí que tu probabilidad sea:

$$EM = 35\left(\frac{1}{37}\right) - 1\left(\frac{36}{37}\right) \approx -0.027$$

Esto significa, que si juegas infinitas veces a la ruleta cada vez perderás 2,7 céntimos por cada peso, aproximadamente.

¿SABÍAS QUE?...

La ruleta y su sumatoria: La ruleta es un juego emblemático en los casinos, pero ¿sabías que, si sumas todos los números en la ruleta, desde el 1 hasta el 36, obtienes un total de 666? Esto ha llevado a algunos a llamar a la ruleta el "Juego del Diablo" debido a que el número 666 en la cultura popular se asocia con lo maligno.

2. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en un momio de un partido de futbol soccer?, suponiendo que el momio o cuota es el siguiente:

Equipo 1 (primer lugar en la tabla general)	Empate	Equipo 2 (último lugar de la tabla general)
2.00	3.50	3.90

Para calcular la probabilidad se calcula el inverso de cada cantidad, es decir:

$$\frac{1}{2.00} = 0.500$$
$$\frac{1}{3.50} = 0.286$$
$$\frac{1}{3.90} = 0.256$$

Se suman estas cantidades y se multiplica por 100

$$(0.500 + 0.286 + 0.256) = 1.042$$

$$1.042 \times 100\ \% = 104.2\ \%$$

Este resultado se llama overrround, que significa excedente o ventaja, así la casa siempre tiene un respaldo para no perder, porque en teoría la suma debería de resultar 100% y hay un excedente de 4.2%.

3. ¿Cómo calcularías la comisión que te cobrarían por apostar y ganar en este juego?

Hay numerosas maneras para calcular las comisiones de cuotas específicas.
Una forma muy común es la siguiente:

$$\left(1 - \left(\frac{1}{1.042}\right)\right) \times 100 = \mathbf{4.03}$$

Así que las cuotas de este partido producen unas comisiones del 4%.

En conclusión, si no sabes sobre probabilidad, lo más seguro es que pierdas cada vez que apuestes, porque estas casas están asesoradas por matemáticos, y tienen simulaciones para calcular la probabilidad de éxito o fracaso en cada evento deportivo por lo que ellos deciden como ir modificando las cuotas una vez que comienza el evento, los cuales siempre llevan ventaja sobre el apostador o cliente y entonces, la casa nunca pierde, aun cuando siempre hay algunos ganadores.

Definición de frecuencia relativa

La definición clásica de probabilidad tiene la desventaja de que la expresión "igualmente posible" es vaga. Como esta expresión parece ser sinónimo de "igualmente probable", la definición es cíclica, ya que se define probabilidad en términos de su propia probabilidad. Debido a esto, algunas personas han abogado por una definición estadística de probabilidad. De acuerdo con esto, se considera que la probabilidad estimada o empírica de un evento es la frecuencia relativa de ocurrencia del evento cuando la cantidad de observaciones es muy grande. La probabilidad es el límite de esta frecuencia relativa a medida que la cantidad de observaciones aumenta de manera indefinida.

Ejemplo.

Si en *1 000* lanzamientos de una moneda se obtienen *429* soles, la frecuencia relativa con la que se obtienen soles es $429/1\,000 = 0.429$. Si en otros 1 000 lanzamientos se obtienen *593* soles, la frecuencia relativa en los 2 000 lanzamientos es $(429 + 593)/2\,000 = 0.511$.

De acuerdo con la estadística, cada vez se estaría más cerca de un número que representa la probabilidad de que caiga sol en un lanzamiento de una sola moneda. Según los resultados presentados, este número sería 0.5 a una cifra significativa. Para obtener más cifras significativas se necesitan más observaciones. La definición estadística, aunque útil en la práctica, tiene dificultades desde el punto de vista matemático, ya que quizá no exista un verdadero número límite. Debido a esto, la teoría de probabilidad moderna ha sido desarrollada en forma axiomática.

Probabilidad condicional; eventos independientes y dependientes

Si E_1 y E_2 son dos eventos, la probabilidad de que ocurra E_2, dado que E_1 ha ocurrido, se denota $P(E_2|E_1)$ o $P(E_2$ *dado* $E_1)$ y se conoce como la probabilidad condicional de E_2 dado que E_1 ha ocurrido.

Si la ocurrencia o no ocurrencia de E_1 no afecta la probabilidad de ocurrencia de E_2, entonces, $P(E_2|E_1)= P(E_2)$ es decir, E_1 y E_2 son eventos independientes, de lo contrario, son eventos dependientes.

Si se denota con E_1E_2 el evento de que "tanto E_1 como E_2 ocurran", evento al que suele llamarse evento compuesto, entonces, $P(E_1E_2)= P(E_1)P(E_2|E_1)$.

En particular, $P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2)$ para eventos independientes.

Para tres eventos E_1, E_2 y E_3, tenemos
$P(E_1E_2E_3)=P(E_1)P(E_2|E_1)\ P(E_3|E_1E_2)$

Es decir, la probabilidad de que ocurra E_1, E_2 y E_3 es igual a (la probabilidad de E_1) × (la probabilidad de E_2 dado que E_1 ha ocurrido) × (la probabilidad de E_3 dado que E_1 y E_2 han ocurrido). En particular, $P(E_1E_2E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)$ para eventos independientes

Ejemplo

Sean E_1 y E_2 los eventos "cae Sol en el quinto lanzamiento" y "cae Sol en el sexto lanzamiento" de una moneda, respectivamente.

Solución:

Entonces, E_1 y E_2 son eventos independientes, por lo tanto, la probabilidad de que salga sol tanto en el quinto como en el sexto lanzamientos es (suponiendo que sea una moneda legal)

$$\boldsymbol{P(E_1E_2) = P(E1)P(E2) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}}$$

Ejemplos:

1. Si la probabilidad de que A esté vivo en 20 años es 0.7 y la probabilidad de que B esté vivo en 20 años es 0.5.

Solución:

Entonces, la probabilidad de que ambos estén vivos en 20 años es (0.7)(0.5) = 0.35

2. Supóngase que una caja contiene tres pelotas blancas y dos negras. Sea E_1 el evento donde "la primera pelota que se saca es negra" y E_2 el evento "la segunda que también es negra", donde las pelotas no se vuelvan a colocar en la caja una vez sacadas. Aquí E_1 y E_2 son eventos dependientes.

Solución:

La probabilidad de que la primera pelota extraida sea negra es:

La probabilidad de que la segunda pelota sea negra, dado que la primera pelota fue negra, es:

$$P(E_2|E_1) = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que las dos pelotas que se extraigan sean negras es

$$P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2E_1) = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Eventos mutuamente excluyentes

Se dice que dos o más eventos son mutuamente excluyentes si la ocurrencia de uno cualquiera de ellos excluye la ocurrencia de los otros.
Entonces, si E_1 y E_2 son eventos mutuamente excluyentes, $P(E_1E_2)=0$.

Si $E_1 + E_2$ denotan el evento "ocurre E_1 o E_2 o ambos", entonces:

$P(E_1 + E_2)=P(E_1)+P(E_2)- P(E_1E_2)$

En particular,

$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)$ si los eventos son mutuamente excluyentes

Por extensión se tiene que si $E_1, E_2, ..., En$ son n eventos mutuamente excluyentes que tienen probabilidades $p_1, p_2, ..., pn$, entonces, la probabilidad de que ocurran E_1 o E_2 o ...E_n es $p_1 + p_2 + ... + pn$.

Esta fórmula $P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2)$ puede generalizarse a tres o más eventos mutuamente excluyentes.

Ejemplos.

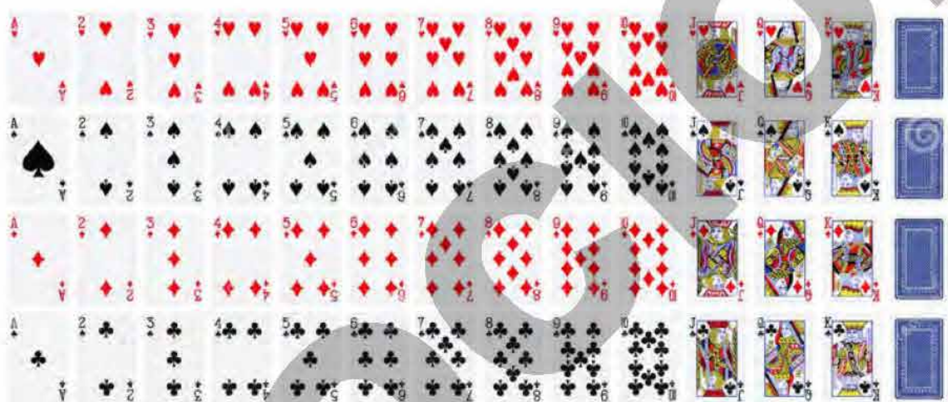
1. Si E_1 es el evento "de una baraja se extrae un as" y E_2 es el evento "de una baraja se extrae un rey", entonces, una baraja contiene 52 cartas, numeradas del 1 al 12 y con cuatro palos o símbolos, los cuales son: Tréboles, Diamantes, Corazones y Picas; también sabemos que hay 4 ases y 4 reyes, entonces la probabilidad es:

$$P(E_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \text{ y } P(E_2) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

y la probabilidad de en una sola extracción se extrae un as o un rey es:

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

Como en una sola extracción o se saca un as o un rey, son mutuamente excluyentes. Como en la siguiente imagen.



2. Si E_1 es el evento "extraer un as" y E_2 es el evento "extraer un trébol" de una baraja, E_1 y E_2 no son mutuamente excluyentes, pues se puede extraer el as de trébol. Sabemos que hay 4 ases y 13 tréboles. Por lo tanto, la probabilidad de extraer un as o un trébol o ambos es:

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2\} = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

Obsérvese que el evento "E_1 y E_2", que consta de los resultados en los que se den los dos eventos, es el as de trébol.

Actividad de aprendizaje

Trabajo independiente: Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Cuando se lanza un dado, éste puede caer de seis maneras distintas, $1, 2, 3, 4, 5,$ o 6

Solución:

2. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en un partido de futbol soccer?, calcula el overround y la comisión que te estarían cobrando por apostar, suponiendo que el momio o cuota es el siguiente:

Local	Empate	Visitante
5.75	4.50	1.50

Solución:

3. Si en 1 000 lanzamientos de una moneda se obtienen 527 soles; Si en otros 1 000 lanzamientos se obtienen 395 soles calcula la frecuencia relativa de cada evento. ¿Cuál es la frecuencia relativa en los 2 000 lanzamientos?

Solución:

4. Sean E_1 y E_2 los eventos "cae Sol en el séptimo lanzamiento" y "cae Sol en el octavo lanzamiento" de una moneda, respectivamente. Calcula la probabilidad de Sol tanto en el séptimo como en el octavo lanzamiento. ¿Qué tipo de eventos son?

Solución:

5. Si la probabilidad de que A esté vivo en 25 años es 0.8 y la probabilidad de que B esté vivo en 25 años es 0.6. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos estén vivos en 25 años?

Solución:

6. Una caja contiene 4 pelotas blancas y 3 negras. Sea E_1 el evento "la primera pelota que se saca es blanca" y E_2 el evento "la segunda pelota que se saca es blanca", donde éstas no se vuelvan a colocar en la caja una vez sacadas. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga una pelota blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda pelota que se extraiga sea blanca? Dado que la primera pelota que se extrajo fue blanca, ¿E_1 y E_2 qué tipo de eventos son?

Solución:

7. Si E_1 es el evento "de una baraja se extrae una reina" y E_2 es el evento "de una baraja se extrae una sota", entonces, ¿Cuál es la probabilidad de los dos eventos E_1 y E_2? ¿Cuál es la probabilidad de que en una sola extracción salga una reina o una jota? ¿Qué tipo de eventos son?

Solución:

8. Si E_1 es el evento "extraer un rey" y E_2 es el evento "extraer un diamante" de una baraja, ¿cuál es la probabilidad de extraer un as o un trébol o ambos? ¿Qué tipo de evento es E_1 y E_2?

Solución:

Evaluación continua y formativa

Evaluar 5E

Tabla de niveles de desempeño del estudiante

Nivel de desempeño	Valoración de los criterios	Referencia numérica
A Destacado	Cinco criterios demostrados	10
B Satisfactorio	Cuatro criterios demostrados	9
C Suficiente	Tres criterios demostrados	8
	Dos criterios demostrados	7
D Requiere apoyo	Un criterio demostrado	6

Lista de cotejo para los ejercicios y problemas realizados

Propósito de la progresión:
Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica.

Objetivo:
Los estudiantes resuelven problemas de probabilidad, número de repeticiones y la frecuencia de un evento en cada ejercicio.

Criterios de evaluación	Sí	No
a) Los estudiantes comprenden el tema de probabilidad, número de repeticiones, la frecuencia de un evento y aplican los conocimientos adquiridos al resolver los ejercicios planteados.	☐	☐
b) Los estudiantes son capaces de aplicar probabilidad, número de repeticiones, la frecuencia de un evento, para resolver los ejercicios que se les pide.	☐	☐
c) Los estudiantes resuelven los problemas de probabilidad, número de repeticiones, la frecuencia de un evento, en colaboración con sus compañeros y sin ayuda del profesor.	☐	☐
d) Los estudiantes trabajan en equipo para realizar correctamente el trabajo que se les pide.	☐	☐
e) Los estudiantes llegan al resultado correcto	☐	☐

Progresión de aprendizaje **4**

Técnicas de conteo

Equipaje de mano

Metas
M 2.2, M3.1, M3.2
Categorías
C1, C3
Subcategorías
S1.2, S1.3, S4

ABORDAJE
(INICIO)

Elige una técnica de conteo (ordenaciones con repetición, ordenaciones, permutaciones, combinaciones) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y con ello generar una mayor conciencia en la toma de decisiones.

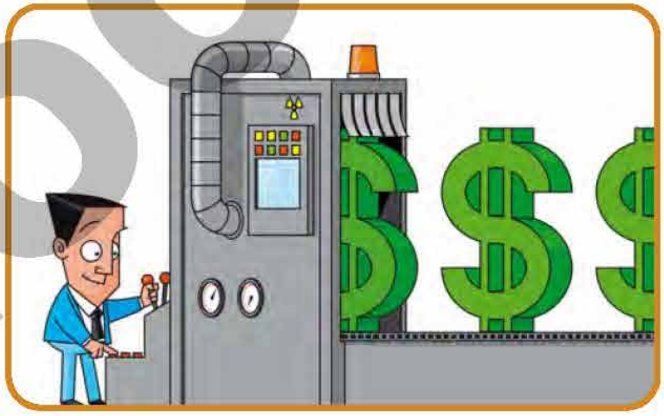
Las técnicas de conteo se introducen para entender la probabilidad de eventos aleatorios en los que la expresión explícita de su espacio muestral es poco factible.

5E Enganchar

Técnicas de conteo

Actividad de aprendizaje

A. En equipos de cuatro integrantes, observen el siguiente video y respondan la pregunta a través de un dialogo grupal. Argumenten sus ideas y escriban su conclusión en el recuadro.



¿Hace cuanto tiempo que se juega la Lotería Nacional en México, y porque hay que comprar la serie completa para ganar el premio mayor, cual es la probabilidad de ganar?

Actividad de aprendizaje

Explorar

A. En equipos de cuatro integrantes contesten la siguiente pregunta.

1. ¿Qué es la lotería nacional para la asistencia pública?

2. ¿Cuándo es la fecha más esperada por los mexicanos para comprar boletos de la Lotería Nacional?

3. ¿Qué es una serie en la Lotería Nacional, cuantos boletos se venden y como vienen numerados o clasificados?

4. Dependiendo del tamaño de la serie ¿porque se habla de vigésimo o cachito y que quiere decir reintegro?, por nombrar un ejemplo.

5. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la Lotería nacional? Busca algún ejemplo para explicar esto y que te quede más claro.

6. ¿Que son los pronósticos deportivos para la asistencia pública?

7. Menciona al menos cinco tipos de juegos de azar que compiten con la Lotería Nacional.

8. ¿Cómo calcularías la probabilidad de éxito? para ganar en la Lotería Nacional o en alguno de los juegos de azar que escribiste en la pregunta anterior.

MOMENTO DE REFLEXIÓN

5° Respeto a la dignidad humana

1. Observa el siguiente video "Consejos de los expertos para ganar la lotería" y reflexiona su contenido.

https://www.youtube.com/watch?v=_O5cJR36cGI

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

Métodos de conteo

5E Explicar

Surgen como una necesidad para analizar y comprender matemáticamente los juegos de azar (comprender la suerte).

Históricamente esta teoría surge de las formas de entretenimiento de la alta sociedad francesa hacia el siglo XVII aproximadamente, las cuales consistían en participar en juegos que incluían lanzamientos de dados, monedas, extracción de objetos, cartas, etc. Por ello, para establecer matemáticamente el fenómeno de la suerte, surgen los métodos de conteo empleados y descubiertos por los matemáticos franceses Blaise Pascal y Pierre de Fermat, quienes aplicaron estos métodos para comprender y analizar las decisiones más favorables para los jugadores, a modo de tener más éxito basando las decisiones en conceptos matemáticos.

Además del surgimiento histórico para resolver una situación de la vida cotidiana, estos conceptos (después de su estudio a lo largo de los siglos), se han desarrollado a tal punto que se comenzaron a aplicar a ramas tecnológicas como la computación para el cifrado de información, por lo que se convierte en una herramienta para el análisis y creación de juegos de azar y concursos donde en muchas ocasiones, más que la suerte, juega la matemática.

Al inicio de la progresión hablábamos acerca de la Lotería nacional, y mencionamos que, según el gobierno, 1 de cada 5 gana. Pero, ¿por qué?

Ganar la lotería o cualquier otro juego que tenga que ver con pronósticos para la asistencia pública es más difícil y complicado de lo que parece, si ganar un volado con una moneda es difícil o una rifa local, con mayor razón es más difícil ganar en la Lotería Nacional en donde se vende como mínimo 120 000 boletos en combinación con los signos del zodiaco, aunado a que depende del número de series en cómo se divida el premio.

¡SABÍAS QUÉ?...

La lotería de Venecia: establecida en 1539, se considera una de las primeras loterías estatales del mundo. Se utilizó para recaudar fondos para obras públicas, incluyendo la restauración de edificios históricos en Venecia. Este enfoque de utilizar los juegos de azar con fines benéficos ha influido en muchas otras loterías.

En muchos casos el número de puntos muestrales en un espacio no es muy grande y así la enumeración o cuenta directa de los puntos del muestreo necesarios para obtener las probabilidades no es difícil. Sin embargo, surgen problemas cuando la cuenta directa se convierte en una imposibilidad práctica. En tales casos se emplea el **análisis combinatorio**, que podría llamarse una forma sofisticada de contar.

Principio fundamental de cuenta. Diagramas de árbol

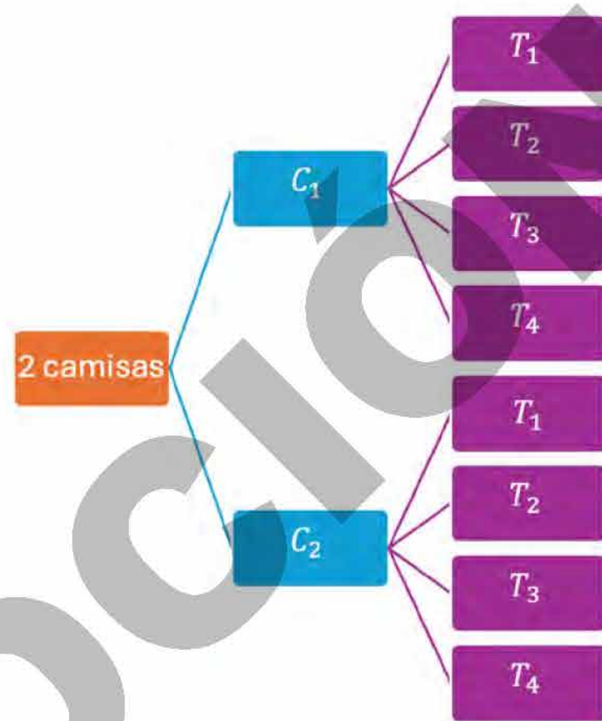
Si una cosa puede realizarse en n_1 maneras diferentes y después una segunda en n_2 maneras diferentes, . . . , y finalmente una ***k-ésima*** cosa puede realizarse en n_k maneras diferentes, entonces, todas las k cosas pueden hacerse en el orden especificado en $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$

Ejemplo:

1. Si un hombre tiene 2 camisas y 4 corbatas, ¿cuántas maneras diferentes tiene de escoger una camisa y una corbata?

Solución:

Si las camisas se representan por C_1 y C_2 y las corbatas por T_1, T_2, T_3, T_4, las diferentes maneras de escoger una camisa y luego una corbata se indican en el diagrama de árbol de la siguiente figura



Por lo tanto, se tienen 8 maneras diferentes de elegir una camisa y una corbata.

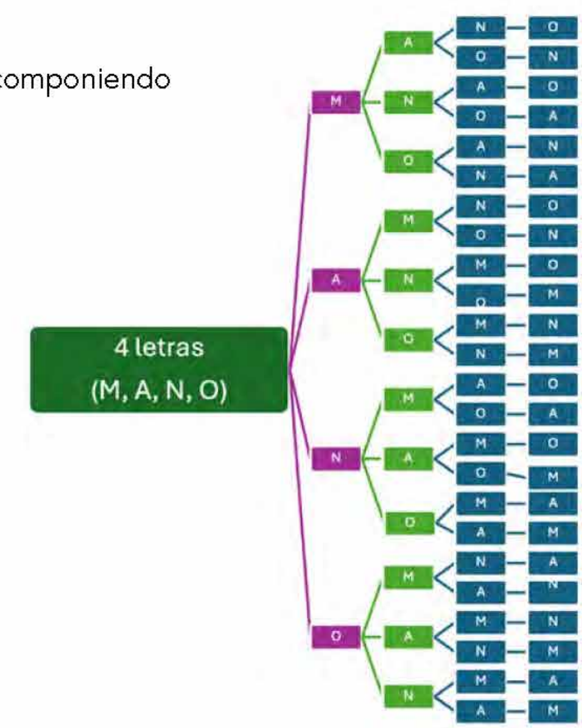
Otra forma de resolver este problema es la siguiente:

Se tiene $\mathbf{2 \cdot 4 = 8}$ maneras de escoger una camisa y luego una corbata.

2. ¿Cuántas combinaciones de letras son posibles formar a partir de la palabra MANO?

Solución:

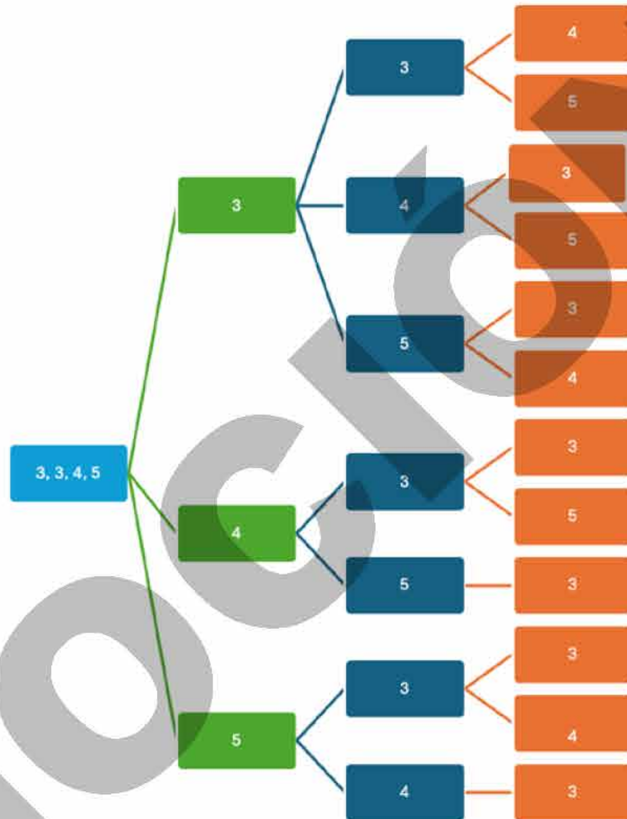
construimos nuestro diagrama de árbol, ramificando o descomponiendo la palabra raíz.



Analizando el diagrama de árbol de la primera rama se obtienen 4 ramificaciones, de la segunda se obtienen 3, de la tercera rama se obtienen 2 y de la cuarta se obtiene una rama; sí multiplicamos las cuatro por las 3 de la segunda por dos ramas de la tercera y una de la cuarta se obtiene: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, que coincide con la suma de las palabras derivadas en la última columna del diagrama anterior.

3. Hay cuatro tarjetas numeradas de la siguiente manera 3,3,4,5; determina de cuantas formas se pueden colocar tres de ellas en una fila.

Solución:
Volvemos a construir nuestro diagrama de árbol, y observamos que, al ir ramificando, cada camino que se pueda tomar es una forma en que se pueden colocar las tarjetas y el resultado será la última rama o columna de tarjetas numeradas.



Entonces, hay 12 formas de colocarlas de tres en tres.

Otra forma de calcularlo es la siguiente: Se tienen 4 números a elegir, entonces, en la primera tenemos 4, en la segunda solo tendríamos 3 y en la última sólo nos quedarían 2 opciones, para poder formar una cifra de tres números, es decir,

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

Tendríamos 24 combinaciones, pero aquí el problema es que se repite dos veces el número 3, entonces, tendríamos $2 \times 1 = 2$ maneras diferentes de acomodar el 3

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Es decir, sólo tenemos 12 posibles combinaciones, que coincide con el resultado del diagrama del árbol.

Como te diste cuenta aplicar el diagrama del árbol es útil cuando las combinaciones son pequeñas, pero conforme se piden más combinaciones de algún evento que pueda suceder **m** formas y que un segundo evento pueda ocurrir **n** formas, entonces, la situación para encontrar las combinaciones se complica con el método del diagrama del árbol, sin embargo, utilizaremos otras dos herramientas de conteo o principios de conteo.

Principios básicos de conteo.

A lo largo de este capítulo se utilizan dos principios de conteo básicos. El primero implica la adición y el segundo, la multiplicación.

Principio de la regla de la suma:

Suponga que algún evento E puede ocurrir en m formas y que un segundo evento F podría suceder en n formas, pero ambos eventos no pueden ser simultáneos. Entonces E o F puede ocurrir en $m + n$ formas.

Principio de la regla del producto:

Imagina que un evento E ocurre en m formas e, independientemente de este evento, hay un segundo evento F que puede ocurrir en n formas. Entonces, la combinación de E y F ocurre en mn formas.

Los principios indicados pueden extenderse a tres o más eventos. Es decir, imagina que un evento E_1 que puede ocurrir en n_1 formas, un evento E_2 que puede ocurrir en n_2 y a continuación de E_2, un tercer evento, E_3, que puede ocurrir en n_3 formas y así en lo sucesivo. Entonces:

Regla de la suma: Si ningún par de eventos puede ocurrir al mismo tiempo, entonces, uno de los eventos ocurre en:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots \ formas.$$

Regla del producto: Si los eventos ocurren uno después del otro, todos los eventos ocurren en el orden indicado en:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots formas.$$

Ejemplo:

En una universidad se imparten tres cursos diferentes de historia, cuatro de literatura y dos de sociología. ¿Cuál es el número de *m y n formas* que puede un estudiante escoger en un curso de cada área?

Solución:

a) El número m de formas en que los estudiantes pueden escoger un curso de cada área es:

$$m = (3)(4)(2) = 24$$

b) El número n de formas en que un estudiante puede escoger justo uno de los cursos es:

$$n = 3 + 4 + 2 = 9$$

Existe una interpretación teórica de estos dos principios. Con más precisión, suponga que $n(A)$ denota el número de elementos en un conjunto A.

Entonces:

1) Principio de la regla de la suma: Suponga que A y B son conjuntos ajenos. Por lo tanto,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

2) Principio de la regla del producto: Sea $A \times B$ el producto cartesiano de los conjuntos A y B.

Entonces,

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Ejemplo:

Supongamos que una placa de automóvil consta de dos letras distintas, seguidas de tres dígitos de los cuales el primero no es cero. ¿Cuántas placas diferentes pueden grabarse?

Solución:

El alfabeto está formado por 26 letras, entonces, la primera letra de la placa se puede elegir de 26 maneras diferentes, la segunda de 25 maneras distintas (puesto que la primera letra no se puede repetir otra vez); para el primer digito hay nueve números por elegir (tomamos para la elección de los números, desde 0, 1, 2,…9, es decir 10 números a elegir), porque la condición dice que el primer digito debe de ser distinto de cero, y para cada uno de los dos dígitos restantes podemos elegir 10 maneras, por lo tanto, pueden grabarse.

$$26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10 = 585000$$

Placas diferentes.

Funciones matemáticas

Se analizan dos funciones matemáticas importantes por su uso continuo en teoría combinatoria.

Función factorial

El producto de los enteros positivos desde 1 hasta n, incluso, se denota por $n!$ y se lee *"n factorial"*.

A saber,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \cdot (n-2)(n-1)\, n = n\,(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

En consecuencia, $1! = 1$ y $n! = n(n-1)$! También es conveniente definir $0! = 1$

Ejemplos:

Calcula los siguientes factoriales, 5!,6! y 7!

Solución:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$
$$7! = 7 \cdot 6! = 7(720) = 5040$$

Convierte la siguiente operación $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ en forma factorial.

Solución:

$$b)\ \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9!} = \frac{12!}{3!\,9!}$$

En forma más general

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{r(r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Para **n** grande, se aplica la aproximación de Stirling (donde $e = 2.7128\ldots$) :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$

Calcular 30!

Solución:

Como $n=30$, es muy grande , usamos la aproximación de Stirling

$$\boldsymbol{n! = 30! = \sqrt{(2\pi(30))} \cdot (30^{30}) \cdot e^{-30} = 2.64 \times 10^{32}}$$

Es decir, que $N = 2.64 \times 10^{32}$ (que tiene 35 dígitos)

Coeficientes binomiales

El símbolo $\binom{n}{r}$ que se lee "nCr" o "de n elementos se eligen r", donde r y n son enteros positivos con $r \leq n$, se define como sigue:

$$\binom{n}{r} = n(n-1)\cdots(n-r+1)r(r-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$$

o, en forma equivalente

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Observe que $n - (n - r) = r$. Esto conduce a la siguiente relación importante.

Lema 1: $\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$ o, en forma equivalente, $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$, donde $a + b = n$,

Con la motivación derivada del hecho de haber definido $0! = 1$, se define:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1 \text{ y } \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\cdot 0!} = 1$$

Ejemplos:

Calcular los siguientes coeficientes binomiales $\binom{8}{2}, \binom{9}{4}, \binom{12}{5}$

Solución:

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28$$

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126$$

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\,(12-5)!} = \frac{12!}{5!\,7!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 792$$

Observe que $\binom{n}{r}$ tiene exactamente **r** factores tanto en el numerador como en el denominador.

Calcular $\binom{10}{7}$

Solución:

Hay 7 factores tanto en el numerador como en el denominador. Sin embargo, $10 - 7 = 3$. Entonces:

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{10-7} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$$

Así aplicando el ***lema 1***, podemos ahorrarnos tiempo y esfuerzo de la siguiente manera, porque ya sabemos que tenemos 3 factores en el numerador y denominador, por lo que...

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$$

Permutaciones

Cualquier arreglo de un conjunto de n objetos en un orden dado se denomina permutación del objeto (tomando todos a la vez). Cualquier arreglo de cualesquiera $r \leq n$ de estos objetos en un orden dado se denomina ***"r permutación"*** o ***"permutación de los n objetos tomando r a la vez"***.

Ejemplo. El conjunto de letras A,B,C,D.

Entonces,

i) $BDCA$, $DCBA$ y $ACDB$ son permutaciones de las cuatro letras (tomando todas al mismo tiempo).
ii) BAD, ACB y DBC son permutaciones de las cuatro letras tomando tres a la vez.
iii) AD, BC y CA son permutaciones de las cuatro letras tomando dos a la vez.

Normalmente se tiene interés en el número de tales permutaciones sin enumerarlas.
El número de permutaciones de n objetos tomando **r** a la vez se denota por $P(n,r)$ (otros textos usan ${}_nP_r$, $P_{n,r}$, o $(n)_r$).

El siguiente teorema se aplica.

Teorema 1: $P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Se recalca que en $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ hay r factores.

Ejemplo:
Encuentra el número m de permutaciones de seis objetos: A,B,C,D,E,F, tomando tres a la vez.
En otras palabras, encuentra el número de "palabras de tres letras" que usen sólo las seis letras dadas sin repetición.

Solución:

La palabra general de tres letras se representará con las tres siguientes posiciones:____, ____, ____

La primera letra puede elegirse en seis formas; la segunda letra en 5 formas; y, por último, la tercera letra en 4 formas. Cada número se escribe en su posición correcta como sigue: $6,5,4$.

Por la regla del producto, a partir de las seis letras hay $m = 6{\cdot}5{\cdot}4{=}120$ palabras posibles de tres letras sin repetición. A saber, hay *120* permutaciones de 6 objetos tomando 3 a la vez. Esto coincide con la fórmula en el teorema 1:

$$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$$

De hecho, el **teorema 1** se demuestra en la misma forma como se hizo para este caso particular. Considera ahora el caso especial de $P(n,r)$ cuando $r = n$. Se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 1: Hay $n!$ permutaciones de n objetos (tomando todos a la vez).

Por ejemplo, hay $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutaciones de las letras *A, B, C.* Estas permutaciones son *ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA*.

Permutaciones con repeticiones

A menudo es necesario conocer el número de permutaciones en un multiconjunto; es decir, un conjunto de objetos de los cuales algunos son iguales. Entonces, $P(n;\ n_1, n_2, ..., n_r)$ denota el número de permutaciones de n objetos, en donde hay n_1 iguales, n_2 iguales, . . . , n_r iguales.

A continuación, se presenta la fórmula general:

Teorema 2: $P(n;\ n_1,n_2, ..., n_r) = \dfrac{n!}{n_1!n_2! \dots n_r!}$

La demostración del **teorema 2** se indica mediante el siguiente ejemplo particular. Suponga que desea formar todas las "palabras" posibles de cinco letras con las letras de la palabra *"BABBY"*.
Hay $5! = 120$ permutaciones de los objetos B_1, A, B_2, B_3, Y, donde se han identificado las tres letras *B*.
Observe que las seis permutaciones siguientes producen la misma palabra cuando se suprimen los subíndices.

$B_1B_2\ B_3AY, B_2B_1B_3AY, B_3B_1\ B_2AY, B_1B_3B_2AY, B_2B_3B_1AY, B_3B_2B_1AY$

El 6 proviene del hecho de que hay $3!{=}3{\cdot}2{\cdot}1{=}6$ formas distintas de colocar las tres letras *B* en las tres primeras posiciones en la permutación. Esto es cierto para cada conjunto de tres posiciones en que pueden aparecer las letras *B*. En consecuencia, el número de palabras diferentes de cinco letras que pueden formarse con las letras de la palabra *"BABBY"* es:

$$P(5;\ 3) = \frac{5!}{3!} = 20$$

Ejemplo:

Encuentre el número **m** de palabras de ocho letras que pueden formarse con las letras de la palabra *"SIAMESES"*.

Solución:

Se busca el número de permutaciones de *8* objetos, de los cuales *3* son iguales (las tres letras *S*) y *2* son iguales (las dos letras *E*). Por el teorema 2,

$$m = P(8;\ 3,2) = \frac{8!}{3!\,2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 2 = 3360$$

Muestras ordenadas

Muchos problemas tienen que ver con la elección de un elemento de un conjunto S, por ejemplo, n elementos. Cuando un elemento se elige después de otro; por decir, r veces, la elección se denomina muestra ordenada de tamaño r. Se consideran dos casos.

Muestreo con reemplazo

Aquí el elemento se devuelve al conjunto S antes de elegir el siguiente elemento. Por tanto, cada vez hay n formas de elegir un elemento (se permiten las repeticiones). La regla del producto establece que el número de tales muestras es:

$$n \cdot n \cdot n \cdot \cdot \cdot n \cdot n (r\ factores) = n^r$$

Muestreo sin reemplazo

Aquí el elemento no se regresa al conjunto S antes de elegir el siguiente elemento. En la muestra ordenada no hay repeticiones. Una muestra así es simplemente una ***r-permutación***. Por tanto, el número de estas muestras es:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo:

De una baraja con *52* naipes se eligen tres cartas, una después de la otra. Encuentre el número □ de formas en que puede hacerse lo anterior: a) con reemplazo; b) sin reemplazo.

Solución:

a) Cada carta puede elegirse en *52* formas. Así, $m = (52)(52)(52) = 140608$.
Otra forma sería con la formula del muestreo con reemplazo, donde $n = 52$ y $r = 3$

$$m = n^r = 52^3 = 140608$$

b) Aquí no hay reemplazo. Por tanto, la primera carta puede escogerse en *52* formas; la segunda en *51* (porque ya se eligió una carta y no se puede volver a elegir otra vez) y la tercera en *50* formas (porque ya se eligieron dos cartas). Por tanto:

$$m = (P52, 3) = (52)(51)(50) = 132600$$

Combinaciones

Sea S un conjunto con n elementos. Una combinación de estos n elementos tomando r a la vez es cualquier selección de r de los elementos, donde el orden no importa. Esta selección se denomina $r =$ ***combinación***; es simplemente un subconjunto de S con r elementos.
El número de tales combinaciones se denotará por

C (n, r) (otros texto pueden usar, $C_{n,r}$, C^n_t *o* ${}_nC_r$)

Antes de presentar la fórmula general para $C(n, r)$ se considerará un caso especial.

Ejemplo: Encuentre el número de combinaciones de *4* objetos, *A,B,C,D*, tomando *3* a la vez.
Cada combinación de tres objetos determina $3!=6$ permutaciones de los objetos como sigue:

ABC: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
ABD: ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA
ACD: ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA
BCD: BDC, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB

Por tanto, al multiplicar el número de combinaciones por *3!* se halla el número de permutaciones; es decir,

$$C(4,3)\cdot 3! = P(4,3) \quad o \quad C(4,3) = \frac{P(4,3)}{3!}$$

Pero $P(4,3)= 4\cdot 3\cdot 2=24$ y $3!=6$; por tanto,

$$C(4,3) = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

Como ya se indicó, cualquier combinación de n objetos tomando r a la vez determina $r!$ permutaciones de los objetos en la combinación; es decir

$$P(n,r)= r!\,C(n,r)$$

En consecuencia, se obtiene la siguiente fórmula $C(n,r)$, que tiene su expresión formal en el teorema.

Teorema 3: $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Recuerde que el coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ se definió como $\frac{n!}{r!(n-r)!}$; por tanto, $C(r,n) = \binom{n}{r}$

Las expresiones $C(n,r)y\binom{n}{r}$ se usan como sinónimos.

Ejemplo:
Un granjero compra **3** vacas, **2** cerdos y **4** gallinas a una persona que tiene **6** vacas, **5** cerdos y **8** gallinas. Encuentre el número m de opciones que tiene el granjero.

Solución:

El granjero puede escoger las vacas en $C(6,3)$ formas, los cerdos, en $C(5,2)$ formas y las gallinas, en $C(8,4)$ formas. Por tanto, el número m de opciones es:

$$m = \binom{6}{3}\binom{5}{2}\binom{8}{4} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 20\cdot 10\cdot 70 = 14\,000$$

Trabajo independiente: resuelve los siguientes 3 ejercicios en tu cuaderno

5E Elaborar

Actividad de aprendizaje

1. Si un hombre tiene 2 pantalones y 5 camisas entonces, ¿Cuántas maneras diferentes tiene de escoger un pantalón y una camisa?, resolver el ejercicio usando el diagrama del árbol.

2. ¿Cuántas combinaciones de letras son posibles formar a partir de la palabra FÁCIL?, resolver el ejercicio usando el diagrama del árbol.

3. Hay cuatro tarjetas numeradas de la siguiente manera 5,5,6,7; determina de cuantas formas se pueden colocar tres de ellas en una fila. Resolver el ejercicio usando el diagrama del árbol.

4. En una universidad se imparten 4 cursos de física, 5 cursos diferentes de matemáticas y 3 cursos de química. ¿Cuál es el número de **m** formas que puede un estudiante escoger un curso de cada área? ¿Cuál es el numero de **n** formas que un estudiante puede escoger de cada uno de los cursos?

5. La placa de una motocicleta consta de la letra Y, seguida de tres dígitos de los cuales el primero no es cero y dos letras distintas, sin incluir las letras I,Ñ,O y Q, porque no se usan por disposiciones oficiales. ¿Cuántas placas diferentes pueden grabarse?

6. Calcula los siguientes factoriales, 8!,9! y 10!

7. Convierte la siguiente operación $\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$ en forma factorial

8. Calcular 40!

9. Calcular los siguientes coeficientes binomiales (8¦2),(9¦4),(12¦5).

10. Calcular $\left(\frac{16}{9}\right)$

11. Encuentre el número **m** de permutaciones de seis objetos: A,B,C,D,E,F, tomando cuatro a la vez. En otras palabras, encuentre el número de "palabras de cuatro letras" que usen sólo las seis letras dadas sin repetición.

12. Encuentre el número **m** de palabras de diez letras que pueden formarse con las letras de la palabra "CANDIDATAS".

13. De una baraja con 52 naipes se eligen cinco cartas, una después de la otra. Encuentre el número **m** de formas en que puede hacerse lo anterior: a) con reemplazo; b) sin reemplazo.

14. Un granjero compra 6 vacas, 4 cerdos y 10 gallinas a una persona que tiene 12 vacas, 8 cerdos y 20 gallinas. Encuentre el número **m** de opciones que tiene el granjero.

Evaluación continua y formativa

Evaluar 5E

Tabla de niveles de desempeño del estudiante

Nivel de desempeño	Valoración de los criterios	Referencia numérica
A Destacado	Cinco criterios demostrados	**10**
B Satisfactorio	Cuatro criterios demostrados	**9**
C Suficiente	Tres criterios demostrados	**8**
	Dos criterios demostrados	**7**
D Requiere apoyo	un criterio demostrado	**6**

Lista de cotejo para los ejercicios y problemas realizados

Propósito de la progresión:

Elige una técnica de conteo (ordenaciones con repetición, ordenaciones, permutaciones, combinaciones) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y con ello generar una mayor conciencia en la toma de decisiones.

Las técnicas de conteo se introducen para entender la probabilidad de eventos aleatorios en los que la expresión explícita de su espacio muestral es poco factible.

Objetivo:

Los estudiantes resuelven problemas de cálculo para hallar las rectas tangentes y normales de las funciones dadas en los puntos indicados en cada ejercicio.

Criterios de evaluación	Sí	No
a) Los estudiantes comprenden el tema de técnica de conteo (ordenaciones con repetición, ordenaciones, permutaciones, combinaciones) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y aplican los conocimientos adquiridos al resolver los ejercicios planteados.	☐	☐
b) Los estudiantes son capaces de aplicar técnica de conteo (ordenaciones con repetición, ordenaciones, permutaciones, combinaciones) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad, para resolver los ejercicios que se les pide.	☐	☐
c) Los estudiantes resuelven los problemas técnica de conteo (ordenaciones con repetición, permutaciones, combinaciones) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad, en colaboración con sus compañeros y sin ayuda del profesor.	☐	☐
d) Los estudiantes trabajan en equipo para realizar correctamente el trabajo que se les pide.	☐	☐
e) Los estudiantes llegan al resultado correcto.	☐	☐

Progresión de aprendizaje 5

Probabilidad condicional

Equipaje de mano

Metas
M4.1
Categorías
C2
Subcategorías
S1.1, S2.1, S3.2

ABORDAJE
(INICIO)

Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales.

La introducción de la actualización de probabilidades se hace a través de simulaciones y sólo después se aborda el teorema de Bayes.

Probabilidad condicional

A. **En equipos de cuatro integrantes observen el siguiente video, contesta la siguiente pregunta, genera una pequeña discusión y argumenta tus ideas.**

1. ¿Sabes cómo se juega melate y sus otras variaciones de revancha y revanchita, cual es la probabilidad de ganar en este juego?

2. ¿Cuánto es el premio acumulado en cada uno de estos juegos?

Actividad de aprendizaje

A. En equipos de cuatro integrantes, contesten las siguientes preguntas

1. ¿Qué es el sorteo melate, revancha y revanchita y como se juega?

2. ¿Cuál es la dinámica de estos juegos?

3. ¿Cuándo se llevan a cabo los sorteos?

4. ¿Cómo participas en estos juegos?

5. ¿Como ganas en estos juegos?

Responsabilidad ciudadana

Honestidad

MOMENTO DE REFLEXIÓN

Observa el siguiente video "La Estafa de Melate, Paso a Paso del Fraude 20 julio 2012" y reflexiona su contenido.

https://www.youtube.com/watch?v=HGCwlPYcQvE&t=21s

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

Explicar

5E

Probabilidad condicional; eventos independientes y dependientes

En la actividad de enganche se habla sobre el juego Melate en el cual tú eliges 6 números para ganar en el sorteo que se realiza cada miércoles o domingo como parte del programa de juegos para la asistencia pública realizados por el gobierno federal, ellos te dicen que puedes ser unos de los 9 ganadores de cada fin de semana con una bolsa acumulada de unos cuantos millones, pero la realidad es que al ser un juego de azar la probabilidad es mínima, ya que al elegir de entre 52 números, debes escoger sólo seis, los cuales son sin reemplazo, sin embargo, se vuelve una probabilidad condicional, porque cada vez que la tómbola, la cual funciona con aire comprimido ésta sólo elige siete números, siendo el séptimo número al que se le llama adicional, por lo que la probabilidad se hace cada vez más grande, es decir, que si quieres saber cuál es la probabilidad, necesitaría calcular lo siguiente:

$$\mathbf{p(E) = (52)(51)(50)(49)(48)(47)(46) = 674 \times 10^9}$$

Pero al calcular el inverso obtenemos la probabilidad real de ganar

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P(E)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{674 \times 10^9}} = \mathbf{1.48 \times 10^{-12} = 0.00000000000148}$$

Es exageradamente imposible atinarles a los 6 números para que ganes el primer lugar porque la probabilidad es extremadamente pequeña.

En esta progresión vamos a tratar más sobre este tipo de probabilidades condicionales.

Probabilidad condicional; eventos independientes y dependientes

Si A y B son dos eventos, la probabilidad de que ocurra B , dado que A ha ocurrido, se denota $P(B|A)$ o *P(B dado A)* y se conoce como la probabilidad condicional de B dado que A ha ocurrido.

La probabilidad condicional también se puede escribir de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}}$$

Si multiplicamos ambos lados por $P(A)$ obtenemos:

$$\boldsymbol{P(A)P(B|A) = P(B \cap A)}$$

Observa que, si intercambiamos las posiciones de A y B en la fórmula anterior llegamos a:

$$P(B)P(A|B)= P(A \cap B)$$

Como $A \cap B = B \cap A$, entonces:

$$P(A)P(B|A)= P(B)P(A|B)$$

Si la ocurrencia o no de $\boldsymbol{A}$ no afecta la probabilidad de ocurrencia de $\boldsymbol{B}$, entonces,

$$P(B|A)= P(B)$$

Por lo que A y B son eventos independientes, de lo contrario, son eventos dependientes.

Si se denota con $A \cap B$ el evento de que "tanto A como B ocurran", éste suele llamarse evento compuesto es:

$$P(A \cap B)= P(A)P(B|A)$$

En particular,

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ para eventos independientes.

Recíprocamente, si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ por lo tanto,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

Para tres eventos A, B y C, tenemos

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)\ P(C|A \cap B)$$

Es decir, la probabilidad de que ocurra A, B y C es igual a (la probabilidad de A) × (la probabilidad de B dado que A ha ocurrido) × (la probabilidad de C dado que A y B han ocurrido).
En particular, $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ para eventos independientes

Ejemplos

1. Se lanza un dado rojo y uno azul. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea mayor que 5, si sabemos que en el dado rojo obtuvimos un número menor que 3?

Solución:
Representamos a los eventos del experimento mediante parejas de números, en las que el primer elemento es el resultado del dado rojo y el segundo del dado azul:

(rojo,azul)

de los 36 eventos elementales de que consta el espacio muestral del experimento de lanzar 2 dados, en el momento de saber que en el lado rojo obtuvimos un número menor que 3, podemos eliminar los demás eventos y quedarnos solo con estos, con lo que obtenemos un nuevo espacio muestral:

(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)

(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)

En este espacio muestral nos fijamos en los eventos cuya suma es mayor que 5. En total, hay 5 eventos con esta propiedad, es decir, las 5 parejas ordenadas en rojo, así que en la probabilidad de que la suma de los puntos sea mayor que 5, sabiendo que en el dado rojo obtuvimos un número menor que 3 es:

$$P = \frac{5}{12} \approx 0.416$$

2. María compró una computadora genérica. Ella sabe que *5%* de esas computadoras tienen un defecto en el disco, *8%* tienen defecto en el monitor y *1%* tiene tanto el monitor como el disco defectuosos. Al desempacarla, se da cuenta que el monitor está defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el disco esté defectuoso?

Solución:

Observamos que, aunque no conocemos el número de computadoras que fabrica esta compañía, sí sabemos que *5* de cada *100* tiene un defecto en el disco, *8* de cada *100* tienen defectos en el monitor y *1* de cada *100* tiene el monitor y el disco defectuosos. Si llamamos A al evento que consiste en que el disco esté defectuoso y B al evento que consiste en que el monitor esté defectuoso, entonces:

$$P(A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$P(B) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{100}$$

Si sabemos que el monitor de la computadora de María está defectuoso y queremos capturar la probabilidad de que el disco también lo esté, calculamos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{2}{25}} = \frac{1 \times 25}{2 \times 100} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$$

Así que la probabilidad de que el disco esté defectuoso es

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

3. En el ejemplo 2 de la computadora de María. ¿Son independientes los eventos de que el monitor esté defectuoso y de que el disco esté defectuoso?

Solución:
Si llamamos A al evento que consiste en que el disco esté defectuoso y B al evento que consiste en que el monitor esté defectuoso, tenemos:

$$P(A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$P(B) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{100}$$

Por otro lado, sabemos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ para eventos independientes, entonces:

$$P(A)P(B) = \left(\frac{1}{20}\right)\left(\frac{2}{25}\right) = \frac{2}{500} = \frac{1}{250}$$

Así que $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$,

porque $P(A \cap B) = \frac{1}{100} \neq P(A)P(B) = \frac{1}{250}$,

por lo tanto, los eventos no son independientes. Por lo que es más probable que se presente en ambas fallas simultáneamente de lo que sucedería si los 2 eventos fueran independientes.

Teorema o regla de Bayes

Supóngase que $A_1, A_2, A_3, \ldots, An$ son sucesos mutuamente excluyentes cuya unión es el espacio muestral ξ, es decir, uno de los sucesos debe ocurrir.

Entonces si A es cualquier suceso, tenemos el siguiente teorema importante:

Teorema 1: (Regla de Bayes):

$$P(A_k|A) = \frac{P(A_k)P(A|A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(A|A_k)} = \frac{P(A_k)P(A|A_k)}{P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + \cdots + P(A_n)P(A|A_n)}$$

Esto nos permite hallar las probabilidades de los diferentes sucesos $A_1, A_2, A_3, \ldots, An$ que pueden causar la ocurrencia de A. Por esta razón con frecuencia se hace referencia al teorema de Bayes como el teorema sobre la probabilidad de causas.

Ejemplo:

1. En la preparatoria el ***30%*** del alumnado va en primero, ***60%*** en segundo y el resto del tercero. En primero ***la mitad*** del alumnado son mujeres; en segundo, ***la tercera parte*** son mujeres y, en tercero, ***4/5 partes*** son mujeres.
Si elegimos al azar un alumno y es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que vaya en tercer año?

Solución:

Llamamos A_1 al evento "es alumno de primer año", A_2 a "es alumno de segundo año", y A_3 a "es alumno de tercer año".
La colección $\{A_1, A_2, A_3\}$ es una partición del espacio muestral formada por todos los alumnos de la preparatoria. Sea M el evento "ser mujer", entonces, la probabilidad de que un alumno vaya en tercer año, sabiendo que es mujer, es:

$$P(A_3|M) = \frac{P(A_3)P(M|A_3)}{P(A_1)P(M|A_1) + P(A_2)P(M|A_2) + P(A_3)P(M|A_3)}$$

De acuerdo con los datos iniciales del problema tenemos que:

$$P(M|A_1) = \frac{1}{2} \qquad P(M|A_2) = \frac{1}{3} \qquad P(M|A_3) = \frac{4}{5}$$

Como: $$P(A_3) = 1 - P(A_1) - P(A_2)$$

$$= 1 - \frac{30}{100} - \frac{60}{100} = \frac{10}{100}$$

$$P(A_3) = \frac{10}{100}$$

Entonces: $$P(A_3|M) = \frac{\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{30}{100}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{60}{100}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{8}{43} \approx 0.19$$

Así, la probabilidad de que la alumna elegida vaya en tercer año es aproximadamente de **0.19.**

5E Elaborar

Actividad de aprendizaje

Trabajo independiente: Resuelve los siguientes ejercicios y realiza todo el procedimiento completo como se realizó en los ejemplos.

1. Se lanza un dado rojo y uno azul. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea mayor que 6, si sabemos que en el dado rojo obtuvimos un número menor que 4?

Solución:

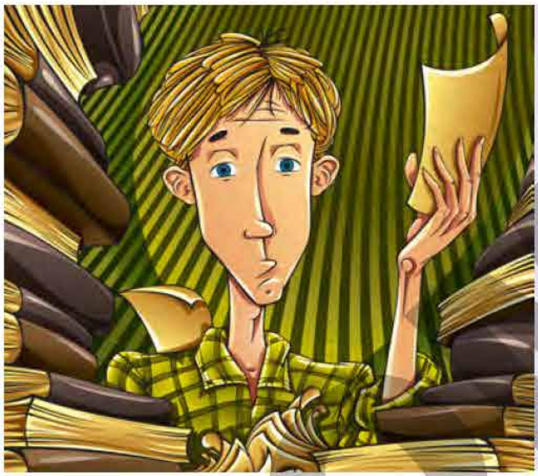
Evaluación continua y formativa

Evaluar 5E

Tabla de niveles de desempeño del estudiante

Nivel de desempeño	Valoración de los criterios	Referencia numérica
A Destacado	Cinco criterios demostrados	10
B Satisfactorio	Cuatro criterios demostrados	9
C Suficiente	Tres criterios demostrados	8
	Dos criterios demostrados	7
D Requiere apoyo	Un criterio demostrado	6

Lista de cotejo para los ejercicios y problemas realizados



Propósito de la progresión:

Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales.
La introducción de la actualización de probabilidades se hace a través de simulaciones y sólo después se aborda el teorema de Bayes.

Objetivo:

Los estudiantes resuelven problemas de cálculo para hallar las rectas tangentes y normales de las funciones dadas en los puntos indicados en cada ejercicio.

Criterios de evaluación	Sí	No
a) Los estudiantes comprenden el tema de la probabilidad de un evento y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales y aplican los conocimientos adquiridos al resolver los ejercicios planteados.	☐	☐
b) Los estudiantes son capaces de aplicar la probabilidad de un evento y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales, para resolver los ejercicios que se les pide.	☐	☐
c) Los estudiantes resuelven los problemas sobre la probabilidad de un evento y los considera excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales, en colaboración con sus compañeros y sin ayuda del docente.	☐	☐
d) Los estudiantes trabajan en equipo para realizar correctamente el trabajo que se les pide.	☐	☐
e) Los estudiantes llegan al resultado correcto.	☐	☐

Unidad 1

Evaluación

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas utilizando todos los conocimientos adquiridos en esta unidad.

1. **En cualquier experimento aleatorio siempre hay incertidumbre sobre si un suceso específico ocurrirá o no. A seste concepto se le conoce como:**

   a) Posibilidad
   b) Probabilidad
   c) Estadística
   d) Azar

2. **Se refiere a la situación en la que todos los eventos posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir.**
   a) Imposibilidad
   b) Improbabilidad
   c) Equiprobabilidad
   d) Evento

3. **Como medida de la oportunidad o probabilidad con la que podemos esperar que un suceso ocurra es conveniente asignar un número entre:**
   a) 1 y 10
   b) 0 y 5
   c) 1 y 5
   d) 0 y 1

4. **Suponga que un evento E puede ocurrir en h de n maneras igualmente posibles. Entonces la probabilidad de que ocurra el evento (a la que se le llama éxito) se denota como:**
   a) $q=P(\text{no } E)=1-P(E)$
   b) $p=P(E)=\frac{n}{h}$
   c) $q=P(E)=1-\frac{h}{n}$
   d) $p=P(E)=\frac{h}{n}$

5. **La probabilidad de que no ocurra el evento (a la que se le llama fracaso) se denota como:**
   a) $q=P(E)=1-P(E)$
   b) $p=P(\text{no } E)=\frac{n}{h}$
   c) $q=P(\text{no } E)=1-\frac{h}{n}$
   d) $p=P(E)=\frac{h}{n}$

6. **Se considera que la probabilidad estimada o probabilidad empírica de un evento es la ocurrencia del evento cuando la cantidad de observaciones es muy grande, es llamada:**
   a) Frecuencia acumulada
   b) Frecuencia relativa
   c) Equiprobabilidad
   d) Igualmente posible

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas utilizando todos los conocimientos adquiridos en esta unidad.

7. Cuando se lanza un dado, éste puede caer de seis maneras distintas, 1,2,3,4,5,o 6. Un evento E de que caiga un 1 o un 3,

a) ¿Cuál es la probabilidad P(E) de que esto suceda?

Solución:

b) Cual es la probabilidad de no obtener un 1 o un 3 (es decir, la probabilidad de obtener 2,4,5,o 6 es?

8. Supóngase que una caja contiene 7 pelotas blancas y 5 pelotas negras. Sea E_1 el evento "la primera pelota que se saca es blanca" y E_2 el evento "la segunda pelota que se saca es blanca", donde las pelotas no se vuelvan a colocar en la caja una vez sacadas. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga una pelota blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda pelota que se extraiga sea blanca? Dado que la primera pelota que se extrajo fue blanca, ¿E_1 y E_2 qué tipo de eventos son?

Solución:

9. Si E_1 es el evento "de una baraja se extrae una reina" y E_2 es el evento "de una baraja se extrae un rey", entonces, ¿Cuál es la probabilidad de los dos eventos E_1 y E_2? ¿Cuál es la probabilidad de en una sola extracción salga una reina o un rey? ¿Qué tipo de eventos son?

Solución:

10. Si E_1 es el evento "extraer un as" y $E2$ es el evento "extraer un corazón " de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de extraer un as o un corazón o ambos? ¿Qué tipo de evento es E_1 y E_2?

Solución:

11. Hay cuatro tarjetas con las siguientes letras x, x, y, z; determina de cuantas formas se pueden colocar tres de ellas en una fila.

Solución:

12. En una universidad se imparten 6 cursos diferentes de física, 5 cursos de química y 4 de filosofía. ¿Cuál es el número de m y de n *formas* que un estudiante puede escoger de cada curso y área?

Solución:

13. De una baraja con 52 naipes se eligen 7 cartas, una después de la otra. Encuentre el número m de formas en que puede hacerse lo anterior: a) con reemplazo; b) sin reemplazo.

Solución:

14. Un granjero compra 4 vacas, 2 cerdos y 5 gallinas a una persona que tiene 12 vacas, 8 cerdos y 15 gallinas. Encuentre el número m de opciones que tiene el granjero.

Solución:

15. Pedro compró un videojuego genérico. Él sabe que 4% de esas videojuegos tienen un defecto en el lector del disco, 6% tienen defecto en el control y 2% tiene tanto el lector del disco como el control defectuosos. Al desempacarlo, se da cuenta que el control está defectuoso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el lector del disco también esté defectuoso?

b) ¿Son independientes los eventos de que el control esté defectuoso y de que el lector del disco esté defectuoso?

Solución:

Evaluación Integradora de la unidad 1

Actividad en equipos de 4 integrantes

Proyecto: juegos de azar

1. **Objetivo del Proyecto**

A partir de las progresiones aprendidas en esta unidad 1, se aplicarán los conceptos más relevantes aprendidos en cada tema para realizar una feria de juegos de azar con tus compañeros de grupo de primer semestre.

Utilizando los conocimientos de probabilidad de manera crítica y reflexiva, para la solución de problemas.

Comprende y analiza conceptos del tema como: Probabilidad, equiprobabilidad, frecuencia relativa, eventos mutuamente excluyentes, probabilidad condicional, eventos independientes y dependientes, teorema de Bayes, etcétera.

Para esto se formarán equipos de cuatro integrantes y ustedes decidirán los criterios para evaluarse en común acuerdo con sus compañeros y el profesor.

Entregaran un trabajo escrito en el cual ustedes explicaran brevemente de que trata su juego y cuál es la probabilidad de éxito y fracaso de su juego, así como las regla de su juego.

Carátula (nombre de la escuela, profesor, materia, integrantes del equipo, nombre del proyecto, grado y grupo, fecha de entrega.

1. Objetivo
El que se menciona arriba, copiarlo tal cual en su trabajo.

2. Introducción
Hacer una breve descripción de su juego

3. Desarrollo
Hacer una breve descripción de como hicieron su juego en caso de que lo construyan o que tipo de juego utilizaran.

4. Análisis
Reglas del juego y premios que recibirá cada equipo ganador y explicar cuál es la probabilidad de éxito o fracaso de su juego.

5. CONCLUSIONES
Cuál es el aprendizaje y/o experiencia que se llevan al realizar este proyecto de juegos de Azar.

6. FUENTES DE INFORMACIÓN (BIBLIOGRÁFICA Y CIBERGRÁFICA)
Coloca las fuentes de consulta que utilizaste para tu investigación.

Matrices para evaluar las progresiones a desarrollar (de acuerdo con los instrumentos y/o estrategias que se utilizarán para evaluar progresiones y contenido central).

Rúbrica para evaluar JUEGO DE AZAR					
	Niveles de Desempeño				
Categoría (Indicadores)	Muy bueno (10)	Bueno (9)	Suficiente (8)	Insuficiente (7)	Puntuación obtenida
Atractivo	Colores contrastantes y por lo menos 3 gráficos originales fueron usados para dar a al juego mayor atractivo visual.	Colores contrastantes y por lo menos 1 gráfico fue usado para dar al juego mayor atractivo visual.	Colores contrastantes y gráficos copiados fueron usados para dar al juego un mayor atractivo visual.	Poco o no color o menos de 3 gráficos fueron incluidos.	
Reglas	Las reglas fueron escritas lo suficientemente claras para que todos los compañeros puedan fácilmente comprender como jugar el juego.	Las reglas fueron escritas, pero una parte del juego necesita un poco más de explicación.	Las reglas fueron escritas, pero los compañeros tuvieron algunas dificultades para comprender el juego.	Las reglas no fueron escritas.	
Creatividad	El equipo puso mucho esfuerzo en hacer el juego interesante y divertido para jugar como fue demostrado por las preguntas creativas, piezas del juego y/o el juego mismo.	El equipo puso mucho esfuerzo en hacer el juego interesante y divertido para jugar usando textura, escritura elegante y/o personajes interesantes.	El equipo trató de hacer el juego interesante y divertido, pero algunas de las cosas hicieron el juego difícil de entender y/o de disfrutar.	Poco esfuerzo fue puesto en hacer el juego interesante o divertido.	
Conocimiento Adquirido	Todos los estudiantes en el grupo pueden fácil y correctamente explicar varios aspectos sobre el tema usado para el juego sin mirar el juego.	Todos los estudiantes del grupo pueden fácil y correctamente explicar 1-2 aspectos sobre el tema usado para el juego sin mirar el juego.	La mayor parte de los estudiantes en el grupo pueden fácil y correctamente explicar 1-2 aspectos del tema usado para el juego sin mirar el juego.	Algunos estudiantes en el grupo no pudieron correctamente explicar los aspectos sobre el tema usado para el juego sin mirar el juego	
Trabajo Cooperativo	El equipo trabajó bien en conjunto. Todos los miembros contribuyeron equitativamente en cuanto a la cantidad de trabajo.	El equipo generalmente trabajó bien. Todos los miembros contribuyeron de alguna manera a la calidad del trabajo.	El equipo trabajó relativamente bien en conjunto. Todos los miembros contribuyeron un poco.	El equipo no funciona bien en conjunto y el juego da la impresión de ser el trabajo de sólo 1-2 estudiantes del equipo	
Precisión del Contenido	Todas las tarjetas de información hechas para el juego están correctas.	Todas menos una de las tarjetas hechas para el juego está correctas.	Todas menos dos de las tarjetas hechas para el juego están correctas.	Varias de las tarjetas de información para el juego no son exactas.	
				Total:	