Serie EXplora

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

EDGARDO CASTILLO GARRIDO

PROMOCIÓN

BlueBooks & Magnus

NEM
MCCEMS

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

Dirección Editorial: BB&M Academic

Diseño Gráfico: Jacobo González

Diseño de Portada: Montserrat Rosillo Cárdenas

Maquetación: Jacobo González

Revisión Técnica: BB&M Academic

Dirección de Producción: Ricardo Cruz Flores

Autor: Edgardo Castillo Garrido

Edición: Martha Leticia Martínez De León

Imágenes: Dreamstime

ISBN: En trámite

55 1546 8351
55 49299516

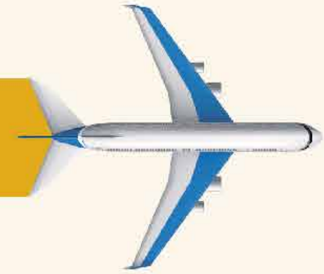
contacto@bluebooksandmagnus.com
www.bluebooksandmagnus.com
ventas@bluebooks.com.mx

Impreso en México / Printed in México
Se terminó la impresión de esta obra en 2024
En los talleres de Fortaleza Gráfica S.A. de C.V.
Amado Nervo Mza. 11 Lte. 43 Col. Palmitas
Alcaldía Iztapalapa. C.P. 09670 Ciudad de México.

Queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total de esta obra bajo ninguna forma o por ningún medio, electrónico ni mecánico, incluyendo fotocopiado y grabación, ni por ningún sistema de almacenamiento y recuperación de información sin el consentimiento previo y escrito de la Casa Editorial

PROMOCIÓN

Contenido/ Progresiones



PROMOCIÓN

Introducción

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

Queridos Colegas Docentes y estimados Estudiantes

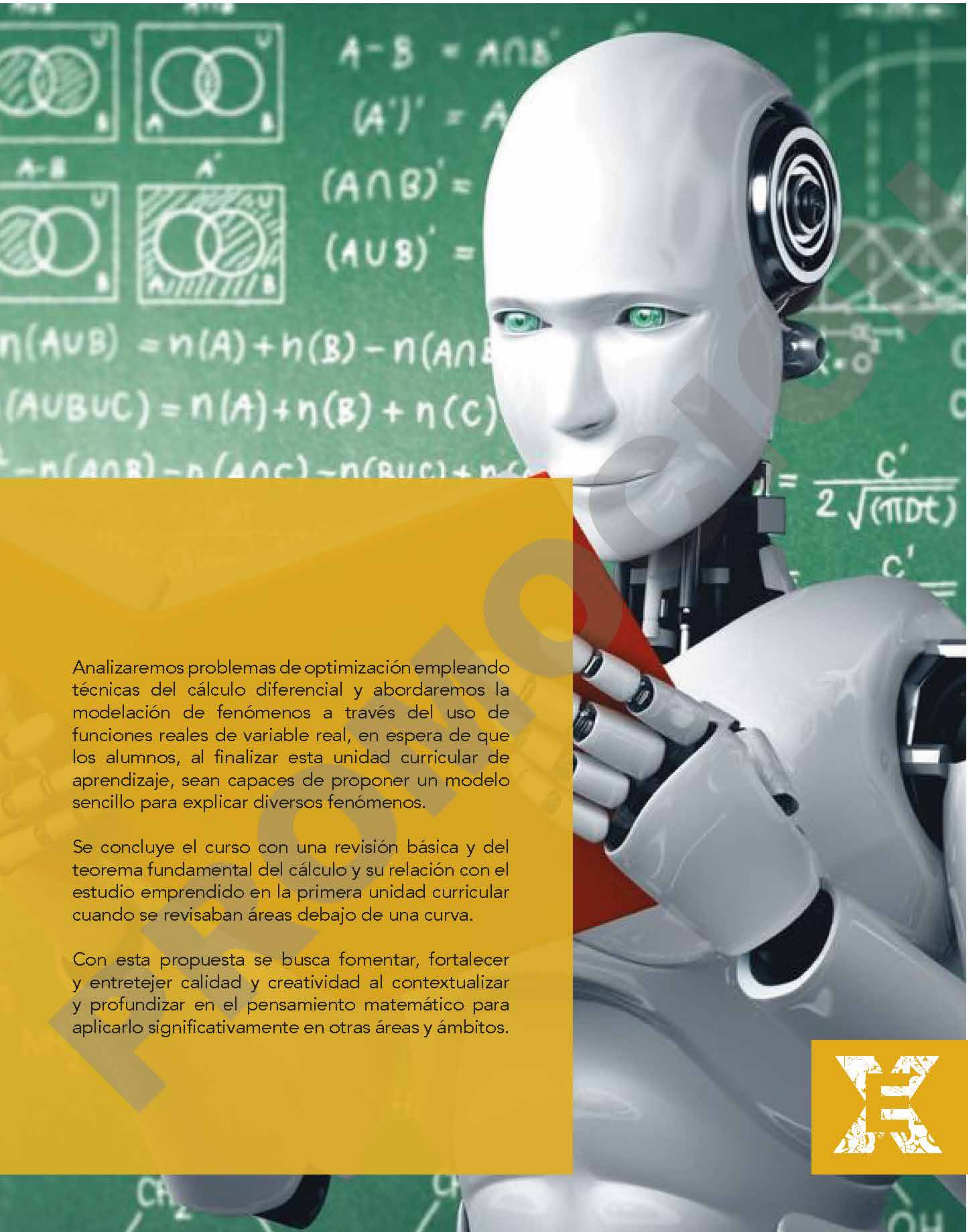
El Pensamiento Matemático es un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta procesos abstractos que surgen cuando el estudiante participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar conjeturas argumentos, además de organizar, sustentar y comunicar sus ideas.

En este libro aprenderás de manera gradual el desarrollo de las habilidades del pensamiento matemático, en relación con su componente humanista, por lo que partimos de diversos estudios relevantes desde la antigüedad, pasando por el pensamiento de diversos filósofos hasta llegar a la concepción matematizada de la realidad de Galileo y la invención del cálculo por Leibniz y Newton.

La perspectiva que iremos desarrollando se fundamenta en un punto medio entre la intuición original de los infinitesimales y el desarrollo formal de la disciplina, para ello, asumiremos algunas leyes sobre límites de funciones reales de variable real y sobre ellas construimos nuevos conocimientos.

Revisaremos el concepto de continuidad, diferenciabilidad y la relación entre ellos (toda función derivable es continua, pero no toda función continua es derivable), ya que buscamos que el estudiante genere intuiciones acerca de las implicaciones de la continuidad y diferenciabilidad, aunado a ello, utilizaremos algunas propiedades de la derivada para estudiar gráficas de funciones y determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de funciones, la concavidad o convexidad de gráficas, su puntos máximos o mínimos relativos, etcétera.

PROMOCIÓN



Analizaremos problemas de optimización empleando técnicas del cálculo diferencial y abordaremos la modelación de fenómenos a través del uso de funciones reales de variable real, en espera de que los alumnos, al finalizar esta unidad curricular de aprendizaje, sean capaces de proponer un modelo sencillo para explicar diversos fenómenos.

Se concluye el curso con una revisión básica y del teorema fundamental del cálculo y su relación con el estudio emprendido en la primera unidad curricular cuando se revisaban áreas debajo de una curva.

Con esta propuesta se busca fomentar, fortalecer y entretejer calidad y creatividad al contextualizar y profundizar en el pensamiento matemático para aplicarlo significativamente en otras áreas y ámbitos.

Promoción

8 Principios de la Nueva Escuela Mexicana

NEM
MCCEMS

Fomentar la identidad con México

Favorece **el amor a la patria**, el aprecio de la **cultura**, **historia y valores** de nuestro país, **respetando** la **diversidad cultural y de pensamiento**.

Responsabilidad ciudadana

Impulsa el uso de **valores** y de los **derechos humanos** en pro del **desarrollo** del **individuo** y de la **comunidad**.

Honestidad

Se enfatiza este **valor** para **desarrollar** la **confianza** y la **congruencia** dentro de la comunidad.

Participación en la transformación de la sociedad

Trabajar de manera **conjunta** con los miembros de la comunidad y no sólo de la manera individual para la **resolución** de **problemas** comunes.

Respeto a la dignidad humana

Respetar, ejercer y promover los derechos humanos.

Interculturalidad

Fomentar el **reconocimiento, respeto y aprecio** por la **diversidad cultural y lingüística** que existe en nuestro país.

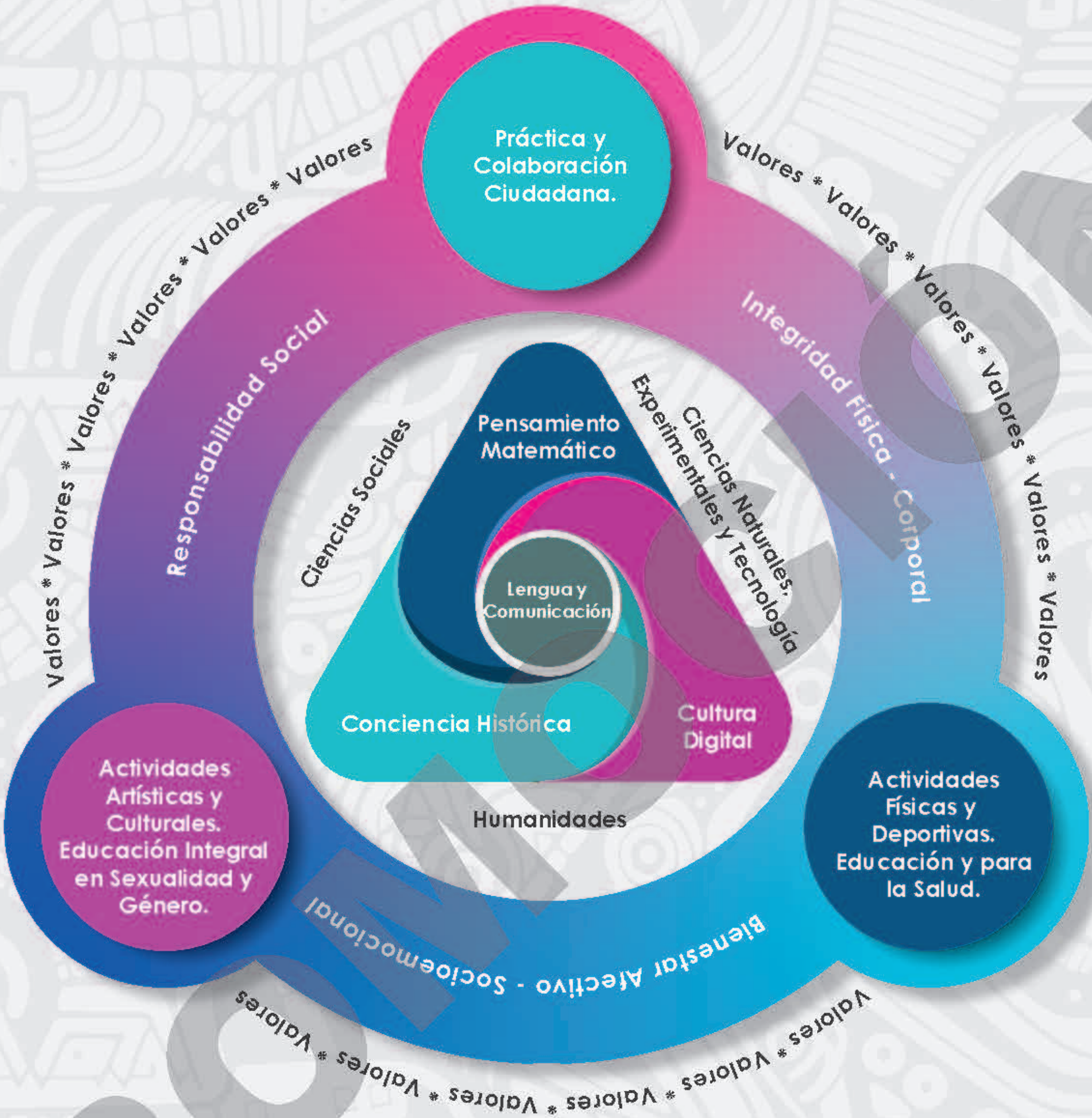
Cultura de la paz

Favorecer la resolución de conflictos mediante el **diálogo** constructivo que deriven en acuerdos y no a través de la violencia. Promover la solidaridad y la búsqueda de una **sociedad pacífica** con **desarrollo sostenible**, **inclusiva** y con **igualdad de oportunidades**.

Respeto a la naturaleza

Incentivar la **conciencia**, el **conocimiento**, la **protección** y **conservación** del entorno.

Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS)



PROMOCIÓN

Currículum Fundamental

Recursos Sociocognitivos:

- Lengua y comunicación
- Pensamiento matemático
- Conciencia histórica
- Cultura digital

Áreas de Conocimiento:

- Ciencias naturales, experimentales y tecnología
- Ciencias sociales
- Humanidades

Currículum Ampliado

Recursos Socioemocionales

- Responsabilidad social
- Cuidado físico corporal
- Bienestar emocional afectivo

Ámbitos de la Formación Socioemocional

- Práctica y colaboración ciudadana
- Educación integral en sexualidad y género
- Actividades físicas y deportivas
- Actividades artísticas y culturales
- Educación para la salud

Categorías, subcategorías, conceptos centrales y transversales

Metas de aprendizaje

Aprendizajes de trayectoria – Perfil de ingreso y egreso

Serie EXplora

¡Bienvenidos a bordo a nuestra experiencia de aprendizaje!

En esta emocionante travesía, hemos diseñado una secuencia didáctica que equipara el proceso de enseñanza-aprendizaje con un viaje inolvidable. Al igual que en cualquier paseo, nuestro recorrido educativo consta de tres momentos fundamentales:

La fase de inicio "ABORDAJE"

La fase de desarrollo "TRAYECTORIA"

La fase de cierre "ATERRIZAJE"

MOMENTO **1** ABORDAJE (INICIO)

Es la sección en la que nos alistamos para comenzar nuestro viaje educativo. Identificamos la progresión y comprendemos sus componentes.

Equipaje de mano

- Metas
- Categorías
- Subcategorías

Las 5E representan cinco fases clave en el proceso de aprendizaje.

Enganchar
Se busca captar el interés de los estudiantes y activar sus conocimientos previos mediante preguntas detonadoras, imágenes, videos o lecturas.

NEM
MCCEMS

8 Principios de la Nueva Escuela Mexicana

BlueBooks & Magnus

PROMOCIÓN

PASAPORTE DEL APRENDIZAJE

MOMENTO 2 TRAYECTORIA (DESARROLLO)

Aquí nos profundizamos en el corazón de la enseñanza y el aprendizaje. Esta fase es el núcleo de nuestro recorrido educativo, donde exploramos conceptos, practicamos habilidades y nos sumergimos en el conocimiento.

Explorar
Se crean situaciones de aprendizaje para que el estudiante active su conocimiento, investigando el tema, se fomenta el trabajo activo a través de actividades practicas, experimentos, observaciones, etc.

Explicar
Se tratan los contenidos de la progresión, se proporciona la base teórica para comprender los temas, se presenta informacion relevante, conceptos clave y explicaciones claras.

Elaborar
Los estudiantes aplican los conocimientos adquiridos y apropiados desarrollando habilidades mediante la elaboración de diferentes instrumentos que permiten profundizar y comprender el tema.

MOMENTO 3 ATERRIZAJE (CIERRE)

Es el momento de finalizar nuestro paseo educativo y asegurarnos de que todos los aprendizajes se consoliden. Aquí reflexionamos sobre lo aprendido, evaluamos nuestro progreso y nos preparamos para futuras aventuras educativas.

Evaluar
Por último, se evalúa el aprendizaje de los estudiantes para determinar si han alcanzado los objetivos de la progresión.

Recursos Educativos
- ¿SABÍAS QUÉ?...
- MOMENTO DE REFLEXIÓN
- TEMA INTEGRADOR
- TRANSVERSALIDAD

Recursos Socioemocionales
- CUIDADO FÍSICO CORPORAL
- BIENESTAR EMOCIONAL AFECTIVO
- RESPONSABILIDAD SOCIAL

Ámbitos de la Formación Socioemocional
- PRÁCTICA Y COLABORACIÓN CIUDADANA
- EDUCACIÓN INTEGRAL EN SEXUALIDAD Y GÉNERO
- ACTIVIDADES FÍSICAS Y DEPORTIVAS
- ACTIVIDADES ARTÍSTICAS Y CULTURALES
- EDUCACIÓN PARA LA SALUD

PROMOCIÓN

Unidad 1

Procesos infinitos en funciones de variable real

Progresión 1- Procesos Infinitos

Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.

Progresión 2 - Antecedentes históricos de la derivada

Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.

Progresión 3 - Funciones

Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.

Progresión 4 - Modelos matemáticos

Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.

Progresión 5 - Más rápido, más alto, más fuerte

Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.

PROMOCIÓN

Equipaje de mano

Metas	Categorías	Subcategorías
M1.1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. (P1, P4) **M1.2** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural. (P2, P5) **M1.3** Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. (P3) **M1.4** Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. (P5) **M2.1** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación. (P5) **M3.1** Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno. (P2) **M3.2** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos. (P2)	**C1.** Procedural (P5) **C2.** Procesos de intuición y razonamiento (P1, P4, P5) **C3.** Solución de problemas y modelación (P2, P3) **C4.** Interacción y lenguaje matemático (P2, P5)	**S1.1** Capacidad para observar y conjeturar (P1, P4, P5) **S1.2** Uso de modelos (P3) **S1.3** Elementos variacionales (P5) **S1.4** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. (P5) **S2.1** Negociación de significados (P2, P5) **S2.2** Pensamiento intuitivo (P4, P5) **S3.1** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios (P2) **S3.2** Pensamiento formal (P5)

PROMOCIÓN

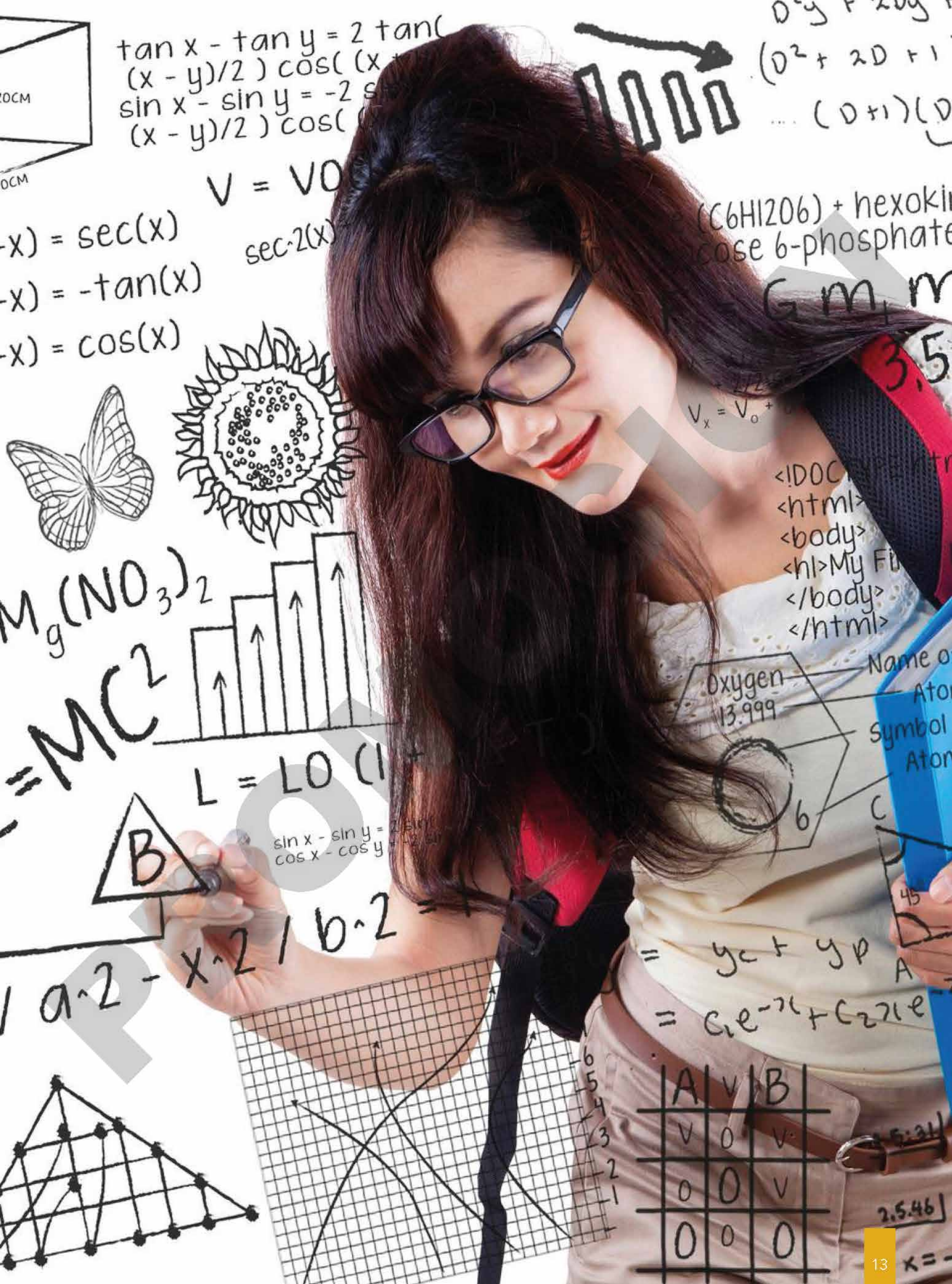
Evaluación Diagnóstica

Trabajo independiente: Resuelve la siguiente sopa de letras y realiza un glosario con las palabras que encuentres, las definiciones deben ser desde el punto de vista matemático.

Origen del cálculo

X	Q	P	Ú	E	A	D	A	D	I	V	A	C	N	O	C	S	Ú	D	X	N	U	B	L	O
Í	T	D	Ü	R	T	Á	R	U	S	A	T	V	P	N	O	H	Í	R	H	V	O	Ñ	M	Ñ
I	T	W	É	L	Á	N	A	É	W	Y	U	I	Ó	Q	Ú	R	N	X	N	R	W	Á	E	R
V	N	Ñ	K	R	Í	O	E	R	C	C	R	I	L	T	T	Í	O	L	Y	Ó	X	Ú	T	E
A	Ñ	F	Á	U	N	M	Y	I	F	P	C	F	C	E	Á	W	P	Y	T	I	Q	O	D	C
R	J	Í	I	Ü	A	Z	I	H	C	A	A	N	É	P	U	Ú	X	É	M	O	O	Ü	E	T
I	Ñ	B	T	N	V	E	Á	T	L	E	P	W	D	R	I	H	O	O	P	Í	A	Z	C	A
A	N	Y	Ü	Ñ	I	Z	Y	E	E	Ó	R	B	Á	O	A	R	D	E	P	O	Q	A	R	A
B	B	R	W	J	M	T	D	Ó	Ü	V	P	C	N	M	P	O	R	T	K	Ú	A	Í	E	C
L	E	W	V	I	Ó	O	O	R	P	Á	V	D	Y	E	Í	A	M	C	Ñ	U	K	I	C	I
E	T	V	W	F	M	N	Ú	Í	D	L	O	J	L	D	C	D	Z	I	S	E	U	C	I	F
R	O	G	N	T	T	T	L	O	D	Á	D	A	F	I	N	K	E	I	N	Á	Ñ	O	E	Á
I	O	H	M	Ó	L	Ü	V	J	É	P	O	H	O	O	V	Ü	N	S	P	Í	Ú	N	N	R
N	U	Ñ	C	U	I	Ü	G	P	V	X	L	N	M	Q	N	S	M	J	Ó	P	M	T	T	G
T	H	L	J	Ú	Ú	C	W	T	Ú	C	E	G	F	Y	T	L	T	Ú	Ü	T	A	I	E	M
E	C	J	A	G	Í	A	N	H	I	S	I	Ú	R	A	E	J	M	V	K	É	L	N	U	N
R	X	R	B	T	X	K	C	U	G	Q	Í	S	N	O	X	T	Q	V	P	O	V	U	V	W
V	A	K	L	M	C	Ó	Z	T	F	E	F	T	S	É	S	T	N	Q	G	Y	N	I	B	I
A	Á	U	O	A	P	A	Ü	C	T	Q	Á	E	O	Á	D	É	Y	E	Y	H	E	D	A	Ñ
L	W	R	A	D	Y	K	R	Ñ	X	N	C	Ú	L	Á	C	Ó	R	Ó	G	D	Q	A	T	Ó
O	N	W	Ó	P	J	E	B	F	E	O	L	Ó	U	A	U	Z	H	M	L	N	K	D	Q	Ó
W	Y	E	C	H	E	Í	Í	A	R	D	Ñ	U	C	É	Ü	N	I	Ü	S	D	A	N	Ñ	O
P	B	M	T	Í	É	X	U	P	W	D	W	I	L	D	H	Ú	S	Í	Ó	S	M	T	Q	J
G	B	M	V	P	Í	Ñ	D	É	É	N	Q	Ñ	Á	X	I	Ú	S	I	M	E	T	R	Í	A
Ü	Í	É	J	X	S	E	Í	Ú	S	N	W	H	C	I	Z	F	U	N	X	L	Q	C	K	H

PROMOCIÓN



tan x - tan y = 2 tan(
(x - y)/2) cos((x
sin x - sin y = -2 s
(x - y)/2) cos(
V = VO
sec(x)
-tan(x)
cos(x)
sec-2(x)
(C6H12O6) + hexoki
cose 6-phosphate
<!DOC
<html>
<body>
<h1>My F
</body>
</html>
Oxygen
13.999
Name o
Ato
Symbol
Ator
=MC2
L = LO (
B
sin x - sin y =
cos x - cos y
a^2 - x^2 / b^2 =
= yc + yp
A V B

Progresión de aprendizaje **1**

Procesos infinitos

Equipaje de mano

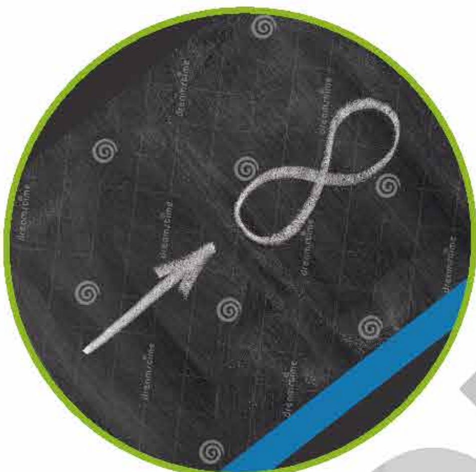
Metas
M1.1
Categorías
C2
Subcategorías
S1.1

ABORDAJE
(INICIO)

5E Enganchar

A. Lee la lectura con atención y describe brevemente cuál es la relación con el tema de la progresión.

El infinito a través de la historia

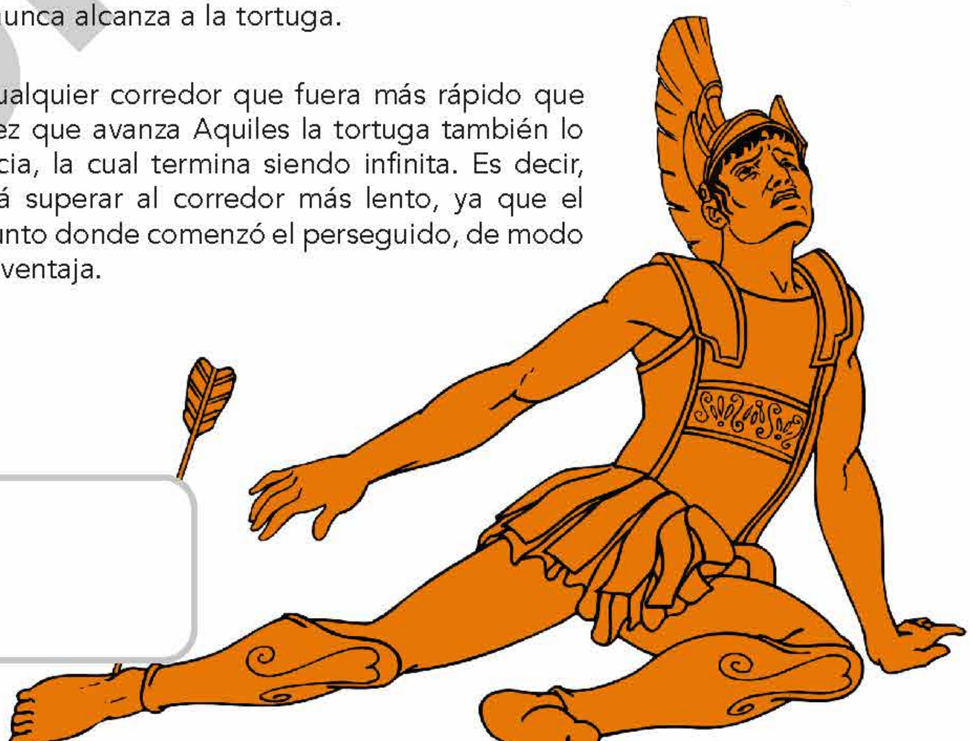


Aquiles y la tortuga es una de las paradojas más antiguas y famosas del filósofo griego Zenón de Elea, en ella se habla del concepto del movimiento del cuál se decía que no existía, que era sólo una ilusión. Esto sucedió hace 2500 años aproximadamente:

Aquiles el de los pies ligeros, el guerrero legendario de mil batallas, compitió con una simple tortuga, por lo que le dio ventaja de 100 m a la tortuga, y así comienza la carrera.

Cuando Aquiles llega al punto en donde inició la tortuga ella ya había avanzado, por ejemplo, 10 m.
Cuando Aquiles vuelve a avanzar esos 10 m, la tortuga avanza 1 m más, cuando Aquiles vuelve a avanzar ese metro, la tortuga ya avanzó 0.1 m más, y así sucesivamente en toda la carrera, entonces, Aquiles nunca alcanza a la tortuga.

Este planteamiento se aplica para cualquier corredor que fuera más rápido que Aquiles o la tortuga, porque cada vez que avanza Aquiles la tortuga también lo hace, y sigue aumentando la distancia, la cual termina siendo infinita. Es decir, el corredor más rápido nunca podrá superar al corredor más lento, ya que el perseguidor debe primero llegar al punto donde comenzó el perseguido, de modo que el más lento siempre tendrá una ventaja.



PROMOCIÓN

Actividad de aprendizaje

A. En equipo de cinco integrantes, investiguen qué es una paradoja y quién fue Zenón. Escribe la respuesta en cada recuadro.

B. Observa con tu equipo el siguiente video y respondan de manera breve y concisa las siguientes preguntas en cada recuadro.

1. ¿Cuál es la paradoja más conocida de Zenón?

2. ¿Qué personajes intervienen en la paradoja narrada?

3. ¿Por qué Aquiles nunca puede alcanzar a la tortuga?

4. ¿Es verdad que el movimiento no existe y sólo es una ilusión?

5. ¿Por qué la distancia se vuelve infinita?

PROMOCIÓN

Explicar

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

Al infinito y más allá

La variación promedio se puede definir desde el punto de vista de la Física; recuerda que en esa materia **la rapidez promedio** (magnitud promedio de la rapidez) (v_{prom}), se define como una medida qué al viajar rápido en un objeto en el espacio, se considera una cantidad a escala.

Para comprender mejor, imagina a un objeto que tarda un **tiempo *t*** en recorrer una **distancia *d***. Donde la rapidez promedio durante ese intervalo se define como:

$$Rapidez\ promedio = \frac{distancia\ total\ recorrida}{tiempo\ transcurrido}$$

$$v_{prom} = \frac{d}{t}$$

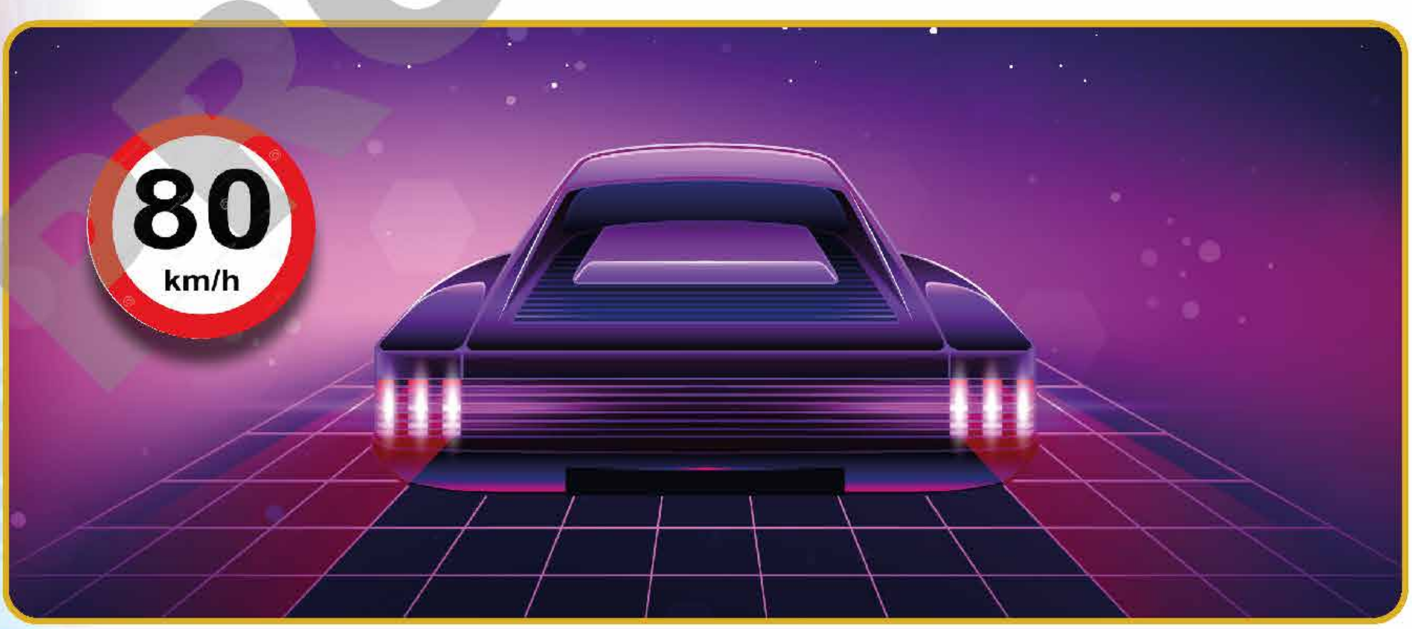
Las unidades de rapidez promedio usan kilómetros por hora (*km/h*) o metros por segundo (*m/s*).

Por otra parte, **la velocidad** es una cantidad vectorial que abarca la rapidez y la dirección del movimiento. Si un objeto experimenta un **desplazamiento vectorial *x*** en un intervalo de **tiempo *t***, resulta que la:

$$Velocidad\ promedio = \frac{desplazamiento\ vectorial}{tiempo\ transcurrido}$$

$$\vec{v}_{prom} = \frac{\vec{x}}{t}$$

Es decir, la dirección del vector velocidad es igual que la del vector desplazamiento. Las unidades de la velocidad (y la rapidez) son las de la distancia dividida entre el tiempo, como m/s o km/h.



PROMOCIÓN

Ejemplo: Un corredor da una vuelta por una pista de 200 m en un tiempo de 25 s. ¿Cuáles son: **a)** la rapidez promedio y **b)** la velocidad promedio del corredor?

Solución:

A partir de la definición,

$$Rapidez\ promedio = \frac{distancia\ total\ recorrida}{tiempo\ transcurrido} = \frac{200\ m}{25\ s} = 8\ m/s$$

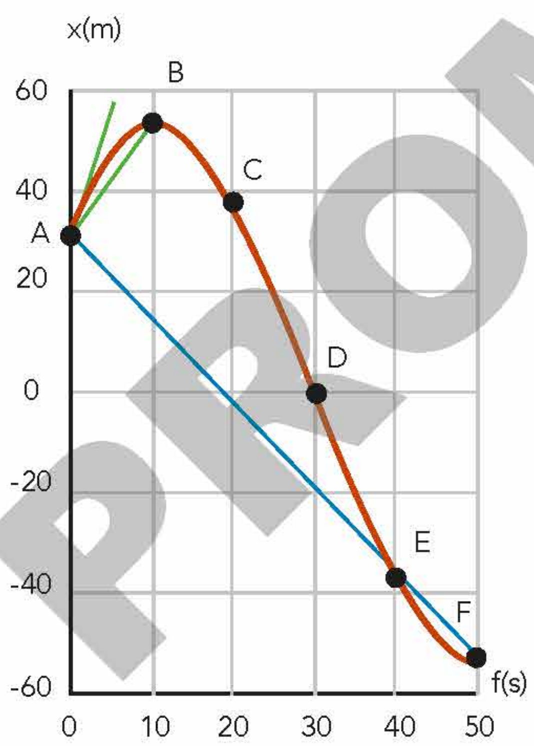
Debido a que la carrera terminó en el punto inicial, el vector desplazamiento del punto inicial al punto final tiene una longitud de cero. Es decir, inicia la carrera en cero metros y llega otra vez al mismo punto, por lo tanto, el desplazamiento es cero, dado que:

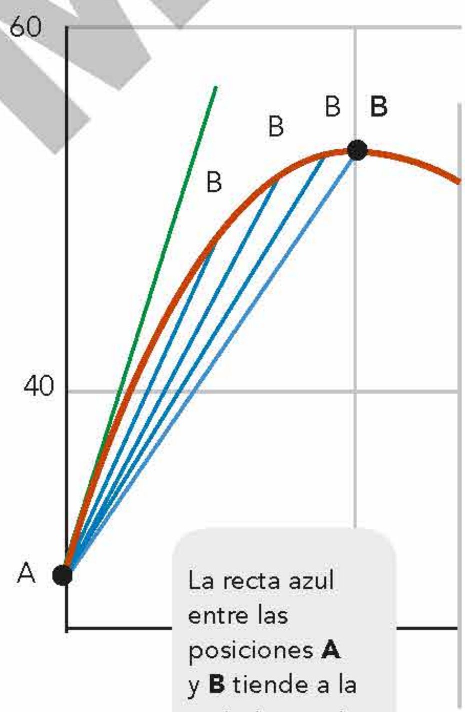
$$\vec{v}_{prom} = \frac{\vec{x}}{t} = \frac{0}{25\ s} = 0\ m/s$$

De esta manera, **la variación instantánea** se define a partir de la velocidad promedio, es decir, **la velocidad instantánea** es la velocidad promedio evaluada para un intervalo de tiempo que tiende a cero. Por tanto, si se somete un objeto a un desplazamiento $\overrightarrow{\Delta x}$ en un tiempo Δt, la velocidad instantánea es:

$$\boldsymbol{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

En donde la notación significa que se va a evaluar la razón $\Delta x/\Delta t$ para un intervalo de tiempo Δt que tiende a cero. Es decir, **la derivada** de la posición $\boldsymbol{x}$ a un tiempo $\boldsymbol{t}$, y se denota como $\boldsymbol{dx/dt}$, esto geométricamente significa, la pendiente de la recta en la gráfica de posición vs tiempo.



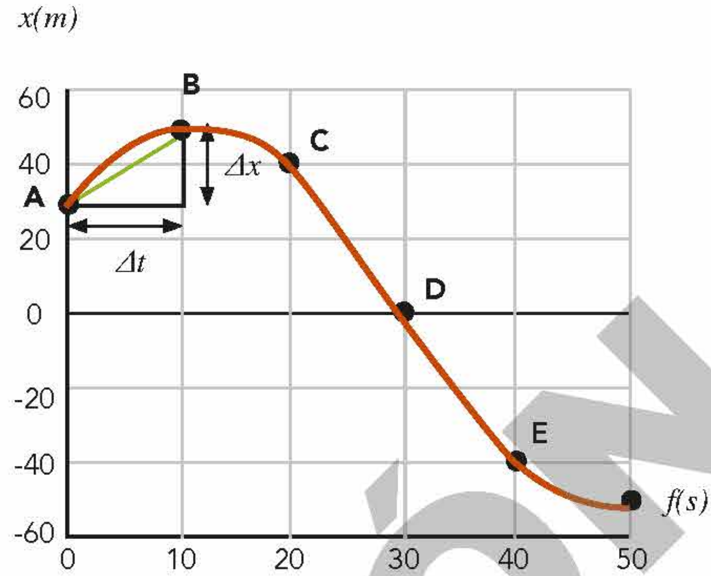


La recta azul entre las posiciones **A** y **B** tiende a la recta tangente verde conforme el punto **B** se mueve más cerca del punto **A.**

En estas gráficas se muestra la velocidad instantánea de un móvil que se mueve a distintas velocidades en diferentes tiempos. Nota que la velocidad instantánea al ser una magnitud vectorial, puede ser negativa.

PROMOCIÓN

En este grafica observamos las distintas velocidades instantáneas que recorre un móvil en disímiles lapsos de tiempo.
Percibe que la derivada de la posición con respecto del tiempo o velocidad instantánea puede ser positiva, negativa o cero en diferentes puntos de la gráfica.



Ejemplo: Calcula la derivada en los puntos **A** y **B** de la gráfica anterior, es decir, la velocidad instantánea entre esos dos puntos.

Solución:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{50\,m - 30\,m}{10\,s - 0\,s} = \frac{20\,m}{10\,s} = 2\,m/s$$

$$\vec{v} = 2\,m/s$$

Entonces, la velocidad instantánea o la derivada de la posición entre los puntos A y B es de 2 m/s.

Procesos infinitos

Su estudio es básico para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, puesto que el concepto de la derivada y la integral de una función están relacionados con los procesos infinitos y su aprendizaje.

En los problemas que revisaremos se muestran objetos geométricos con un mismo patrón de comportamiento, en diferentes escalas y con diferente orientación, a los que llamaremos **fractales**.

Los fractales más importantes son: Cuadrados inscrito, Árbol pitagórico, Copo de nieve de Koch y el **Triángulo de Sierpinski**, que analizaremos a continuación.

Con el estudio de estos fractales comprenderás las características de los procesos infinitos y su representación algebraica, tabular y graficar; igualmente entenderás la relación entre los procesos infinitos con el concepto del límite de una sucesión. Al revisar las diversas representaciones, reconocerás la existencia de un patrón matemático y su conexión con los procesos infinitos para dar entrada al concepto del límite de una función y su trascendencia en el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, puesto que la definición de la derivada y la integral de una función están basadas en el concepto del límite de una función y su relación con los procesos infinitos.

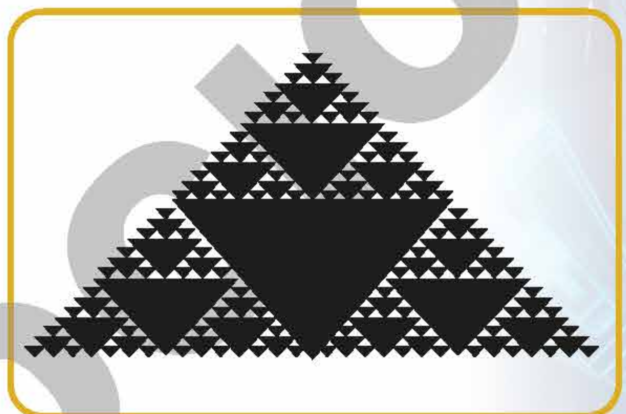
PROMOCIÓN

El **triángulo de Sierpinski** es un fractal autosimilar, formado de un triángulo equilátero, con triángulos equiláteros más pequeños retirados recursivamente de su área restante. Se crea con un triángulo equilátero grande, y se cortan repetidamente triángulos más pequeños fuera de su centro.

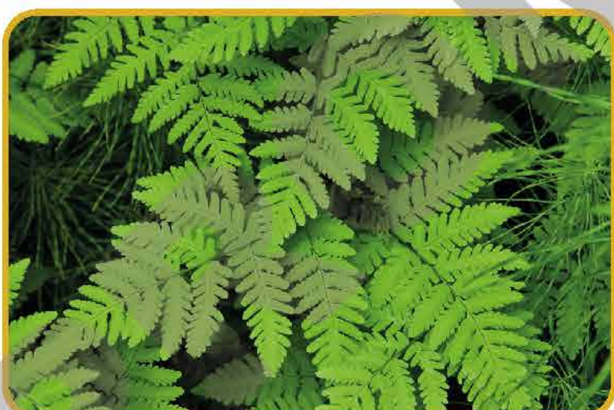
Wacław Sierpinski fue el primer matemático en pensar en las propiedades de este triángulo, pero ha aparecido muchos siglos antes en obras de arte, patrones y mosaicos.

¿SABIAS QUÉ?...

Wacław Franciszek Sierpinski (1882 - 1969) fue un matemático polaco. Hizo importantes descubrimientos en teoría de conjuntos, teoría de números, análisis y topologías. Ha publicado más de 700 artículos y 50 libros. También inventó muchos fractales populares, incluidos el triángulo de Sierpinski, la alfombra de Sierpinski y la curva de Sierpinski.



Si miras alrededor de la naturaleza, notarás plantas complejas como estas:



Ejemplo

En el helecho, los fractales se revelan en muchas hojas pequeñas ramificadas de una más grande.

En el brócoli romanesco los fractales se muestran en conos más pequeños en espiral alrededor de uno más grande.

PROMOCIÓN

Elaborar

Actividad de aprendizaje

Trabajo independiente: De manera individual resuelve los siguientes problemas.

Ejercicio 1: Un corredor da una vuelta por una pista de 400 m en un tiempo de 60 s. ¿Cuáles son: a) la rapidez promedio y b) la velocidad promedio del corredor?

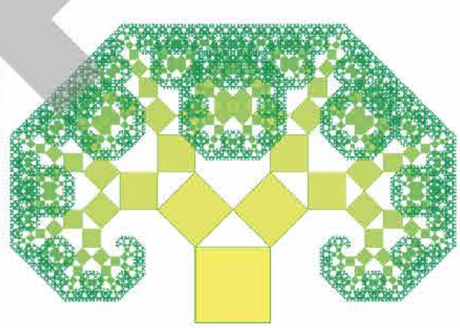
Solución:

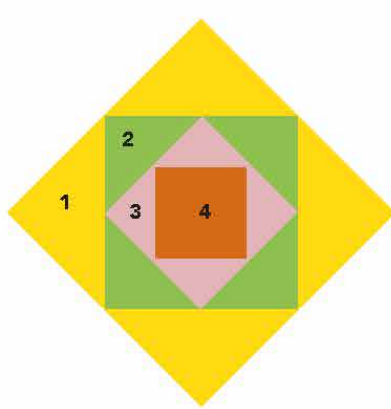
Ejercicio 2: Calcula la derivada en los puntos C y D de la gráfica anterior, es decir, la velocidad instantánea entre esos dos puntos.

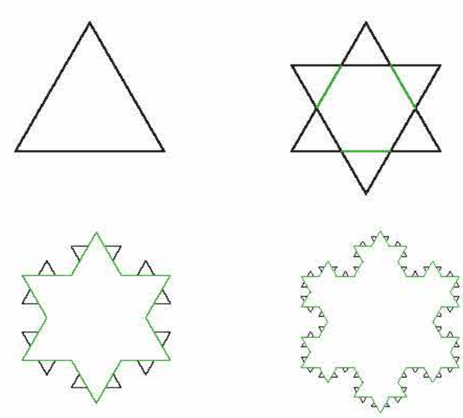
Solución:

Ejercicio 3: Investiga sobre los fractales que se forman de cuadrados inscritos, el árbol Pitagórico y el copo de nieve; después dibuja en tu cuaderno el triángulo de Sierpinski; los cuadrados inscritos (15 cm por lado), el árbol pitagórico (triángulo rectangulo de 7.07 cm×7.07cm ×10cm) y el copo de nieve (triángulo equilatero de 16 cm por lado), lo más detallado posible.

Observa, verás las imágenes para que te des una idea de cómo hacerlos.







PROMOCIÓN

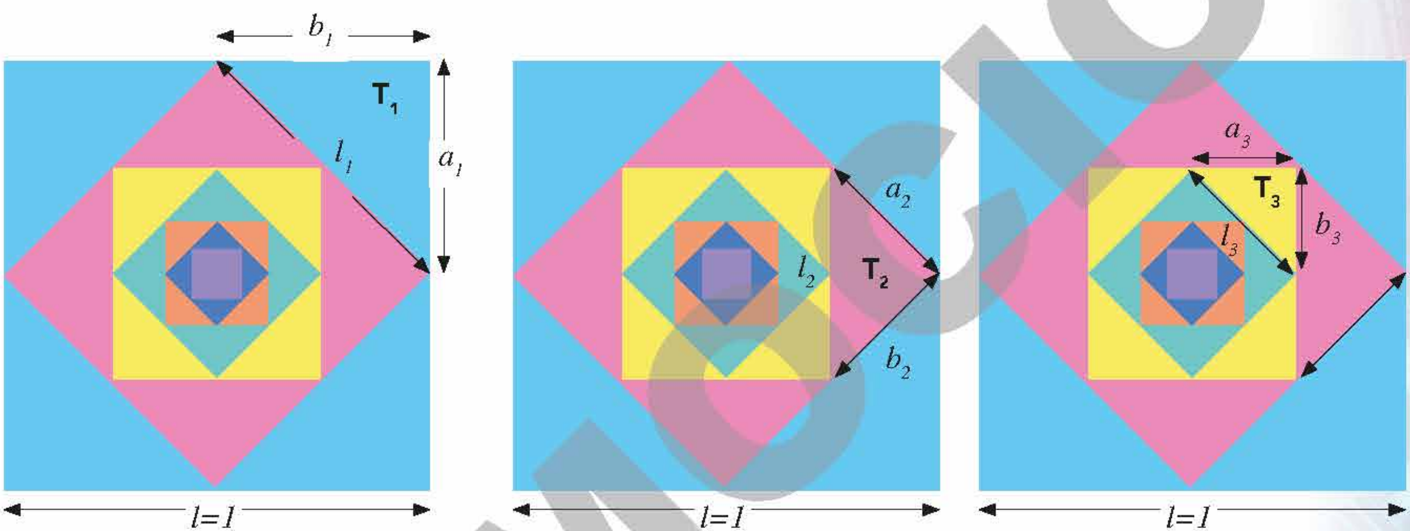
Ejercicio 4: En equipos de cuatro integrantes, realicen en un pliego de papel bond el fractal de los cuadrados inscritos, lo más detallado posible y coloreado, las medidas del primer cuadrado deben de ser de $1\ m \times 1\ m$ de lado y respondan.

a) ¿Cómo podrías calcular la longitud y área de cada uno de los cuadrados inscritos? Pista: supones que el cuadrado original es de $1\ m \times 1\ m$.

b) Encontrar un patrón para calcular cualquier cuadrado inscrito, supongamos para el tercero, cuarto o enésimo cuadrado inscrito.

c) Exponer en plenaria frente al grupo tus cuadrados inscritos y la fórmula a la cual llegaron.

d) Discutan y replanteen la solución del problema.



1. ¿Cuánto mide l_1?

PROMOCIÓN

2. El triangulo T_2, tiene como catetos a a_2 y b_2

3. El triangulo T_3, tiene como catetos a a_3 y b_3

PROMOCIÓN

Evaluación continua y formativa

Evaluar 5E

Tabla de niveles de desempeño del estudiante

Nivel de desempeño	Valoración de los criterios	Referencia numérica
A Destacado	Seis criterios demostrados	**10**
B Satisfactorio	Cinco criterios demostrados	**9**
C Suficiente	Cuatro criterios demostrados	**8**
	Tres criterios demostrados	**7**
D Requiere apoyo	Dos criterios demostrados o menos	**6**

Lista de cotejo para los ejercicios y problemas realizados

Propósito de la progresión:
Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo

Objetivo:
Los estudiantes resuelven problemas sobre variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento utilizando fractales conocidos y calculando el área de uno de ellos, para encontrar una regularidad, usando el método intuitivo para encontrar la enésima longitud y el área enésima del cuadro n.

Criterios de evaluación	Sí	No
a) Los estudiantes están familiarizados con los conceptos aprendidos, y son capaces de dominarlos.	☐	☐
b) Los estudiantes resuelven los problemas de variación promedio e instantánea individualmente, sin ayuda del profesor o de sus compañeros.	☐	☐
c) Los estudiantes trabajan en equipo y realizan correctamente su trabajo.	☐	☐
d) Contestan correctamente las preguntas de los procesos infinitos, en particular de los cuadrados inscritos y logran construir su fractal.	☐	☐
e) Son capaces de deducir la fórmula y calculan la longitud de cada cuadrado y el área de cada cuadrado.	☐	☐
f) Los estudiantes están familiarizados con los conceptos aplicados en esta progresión y son capaces de explicar ante el grupo la solución del problema planteado, dominando el tema y utilizando un lenguaje matemático.	☐	☐

PROMOCIÓN

Progresión de aprendizaje 2

Antecedentes históricos de la derivada

Equipaje de mano

Metas
M1.2, M3.1
Categorías
C3, C4
Subcategorías
S2.1, S3.1

ABORDAJE
(INICIO)

5E Enganchar

Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.

Antecedentes históricos de la derivada

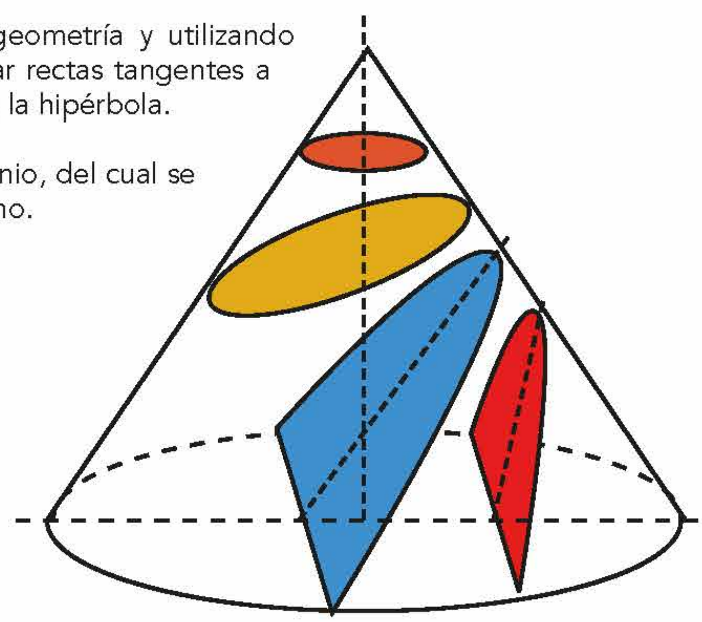
Desde tiempos antiguos, las Matemáticas han sido motivo de estudio y de significativa importancia para el progreso del hombre, ya que además de agrandar los conocimientos matemáticos, permite utilizar la lógica y la abstracción al proporcionar herramientas para enfrentar y resolver problemas cotidianos. Una de esas herramientas fue el surgimiento del Cálculo diferencial que conforme se desarrollaba buscando la perfección, su aplicación tanto Física como Matemática fue fecunda permitiendo resolver problemas que no era posible solucionar con los métodos matemáticos usuales y al mismo tiempo implementando el rigor en las definiciones, teoremas y procesos demostrativos.

Los métodos infinitesimales, estudiados por Arquímedes, y posteriormente por Newton y Leibniz hasta el Siglo XVIII, se convirtieron en una poderosa herramienta Matemática utilizada tanto en ramas de la Física como en la Matemática pura y aplicada.

Matemáticos como René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) introdujeron en sus estudios las primeras ideas relacionadas con magnitudes variables, es decir, aquellas que no permanecen siempre constantes. Estas ideas fueron de suma importancia para lograr resolver el problema de las rectas tangentes, cuyo origen (desde la época de los griegos), denotaba que una recta tangente a una curva era la recta que toca la curva en un solo punto, donde por más que la recta se prolongue jamás tocará nuevamente la curva.

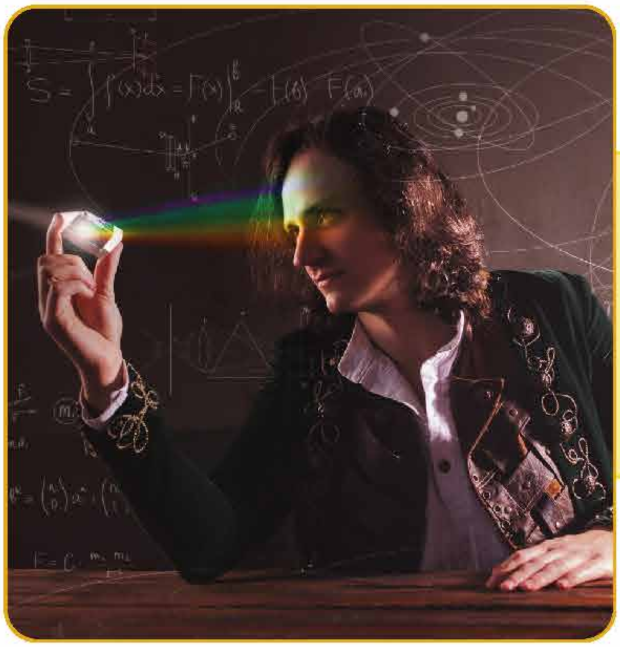
Cabe mencionar que los griegos basados en su geometría y utilizando únicamente regla y compás fueron capaces de trazar rectas tangentes a curvas como la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

En la siguiente figura, observamos el cono de Apolonio, del cual se obtienen las curvas, haciendo diferentes cortes al cono.



Circunferencia
Elipse
Parábola
Hipérbola

PROMOCIÓN

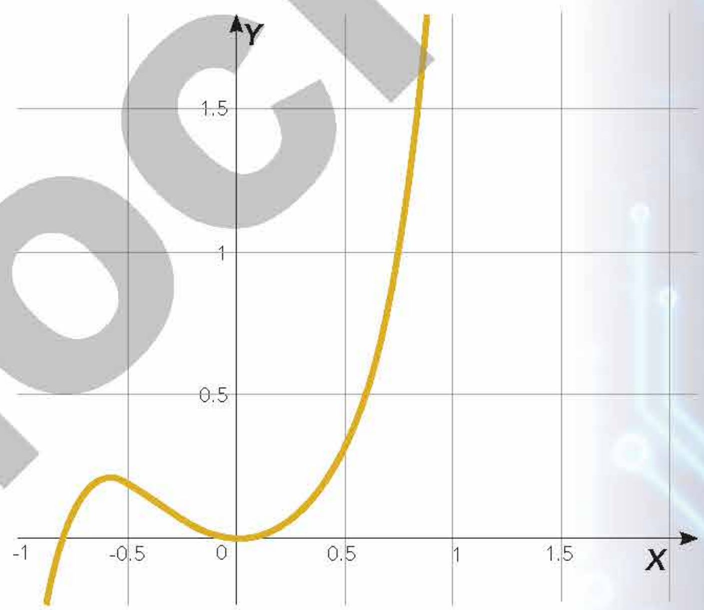


¿SABÍAS QUÉ?...

Las relaciones entre Newton y Leibniz al principio fueron amistosas hasta tal punto que se comunicaban sus descubrimientos con mucha franqueza, tiempo después, surge entre ellos una agria y penosa disputa por la prioridad del descubrimiento del Cálculo Infinitesimal, provocando una conducta recelosa entre los estudiosos de la época que los seguían, de ahí que los matemáticos británicos durante más de un siglo ignoraron la gran superioridad de la notación de Leibniz.

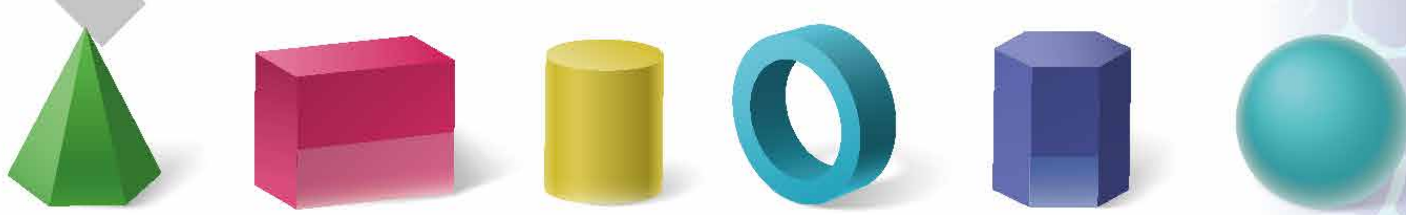
PROMOCIÓN

Al determinar la recta tangente a la curva más allá de la cónica parecería un problema imposible de resolver, sin embargo, al considerar la curva (ver la figura), que no es cónica, la pregunta es: ¿cómo encontramos la recta tangente en este tipo de curvas?



La idea central del Cálculo Diferencial es la noción de derivada, igual que la integral, fueron originadas por un problema de Geometría, siendo el problema central hallar la tangente en un punto a la curva de una función cualquiera.

Mediante esta rama de las matemáticas, es posible hacer una aproximación del mundo real a partir de la abstracción de la naturaleza por medio de entes geométricos (puntos, líneas, triángulos, cuadrados, etcétera); asimismo, a través de ella se determinan diversas propiedades y relaciones de estos entes geométricos.



Actividad de aprendizaje

A. En equipo de 5 integrantes, observar el siguiente vídeo:

B. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué es la derivada?

2. ¿Dónde puede usar la derivada en mi vida cotidiana?

3. Menciona al menos 5 ejemplos de aplicaciones de la derivada

C. A partir de la lectura anterior, contesta las siguientes preguntas en tu cuaderno y la última en el recuadro.

1. ¿Cuál fue el problema que originó el origen del cálculo?
2. ¿Quiénes fueron los matemáticos que estudiaron los métodos infinitesimales?
3. ¿Cuáles fueron las aportaciones de René Descartes y Pierre de Fermat?
4. Los griegos basados en su geometría y utilizando únicamente regla y compás, ¿qué fueron capaces de trazar?
5. ¿Qué se obtiene del Cono de Apolonio al realizar diferentes cortes?

PROMOCIÓN

TRAYECTORIA (DESARROLLO)

La recta tangente a la curva de una función cualquiera

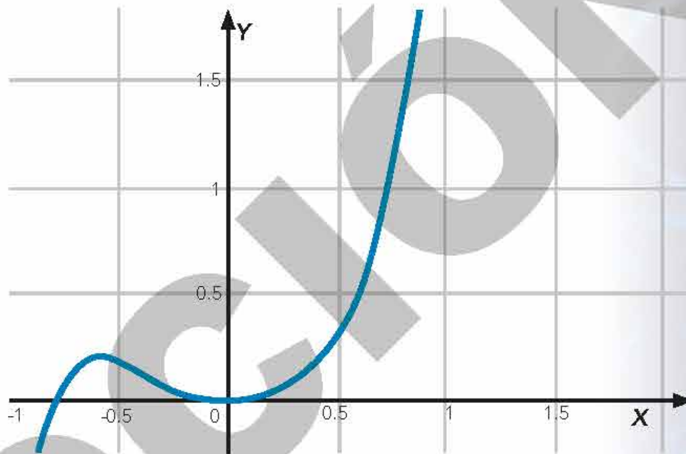
Explicar

Al considerar la curva que aparece en la figura siguiente, la pregunta fundamental es: ¿cómo encontramos la recta tangente a este tipo de curvas?

Para determinar la ecuación de una recta basta con conocer su pendiente y un punto por el que pasa dicha recta:

Al ser m la pendiente de la recta y $p=(x_0, y_0)$ un punto por el cual pasa la recta se tiene que la ecuación es:

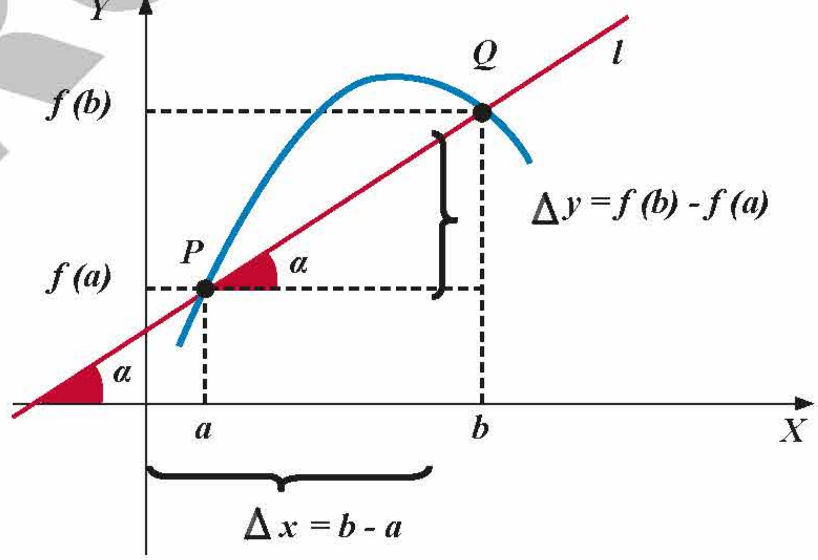
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



Fermat hace uso de estos mismos conceptos para determinar la ecuación de la recta tangente, sólo que en esta ocasión el punto por el cual pasa la recta será el punto de tangencia localizado en la curva, esto es, el punto sobre la curva donde queremos determinar la ecuación de la recta tangente. A continuación, haremos un bosquejo del método utilizado por Fermat para resolver este problema.

Supongamos que queremos determinar la ecuación de la recta tangente en un punto P sobre una curva dada por la función $f(x)$.

Para ello, consideremos un punto sobre la curva muy cercano a P al que llamaremos Q, en este caso el punto Q se localiza a la derecha del punto P. En seguida trazaremos la línea recta que pasa por ambos puntos, y que corta la curva en más de un punto (recta secante), la cual denotaremos por l. (Ver figura)



PROMOCIÓN

De la figura anterior observamos que el punto P tiene coordenadas $(a, f(a))$, mientras que el punto Q tiene coordenadas $(b, f(b))$, siendo $\Delta x = b - a$ una cantidad muy pequeña. Ahora imaginemos que el punto Q se acerca hacia el punto **P** a lo largo de la curva, lo que es equivalente a tomar valores de Δx cada vez más pequeños.

Dado este procedimiento Fermat concluyó que cuando el punto Q se aproxima al punto P, la recta secante tiende a ocupar la posición de la recta tangente a la curva en el punto P.

Veamos esto en términos de las pendientes de la recta tangente y la recta secante. Cuando aproximamos el punto Q a la posición del ***punto*** P,la recta secante se va pareciendo cada vez más a la recta tangente, esto es, la pendiente de la recta secante se aproxima al valor de la pendiente de la recta tangente.

La pendiente de la recta l es:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

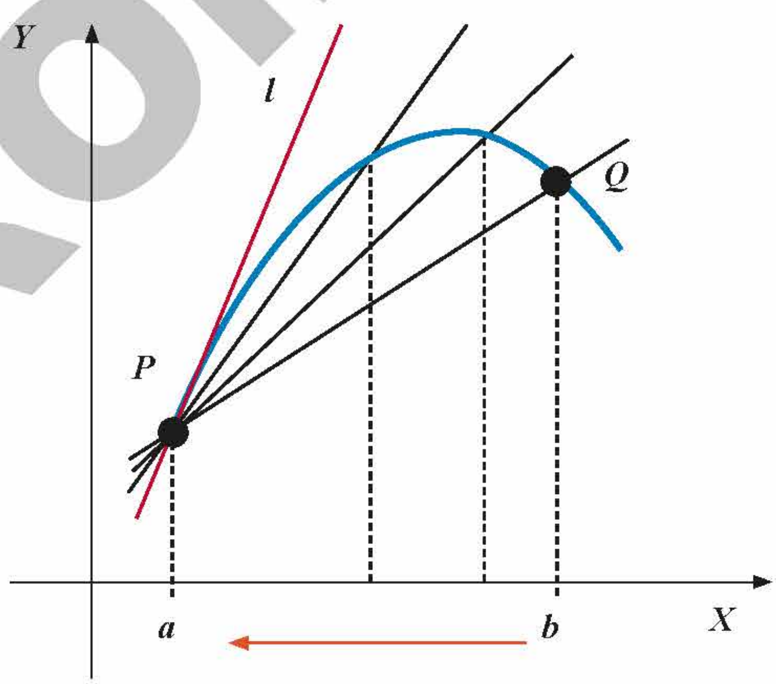
Prolongamos la recta l hasta que corte al eje X. Llamamos α al ángulo formado por la recta l y el eje X, Observamos que $\widehat{P}=\alpha$, ya que el eje X y la ***recta*** $y=f(a)$ son paralelas.
Por otro lado,

$$\tan \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De donde la tangente de α es igual a la pendiente de la recta l la cual es una secante.

Usando esta secante, ¿cómo podemos determinar la pendiente de la tangente a la gráfica de f en P?

Consideremos la familia de rectas secantes obtenidas al hacer Q tienda P, es decir, haciendo que b tienda α, como se muestra en la figura.



PROMOCIÓN

Llamaremos recta tangente en la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ al límite de las secantes o a la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene por pendiente al

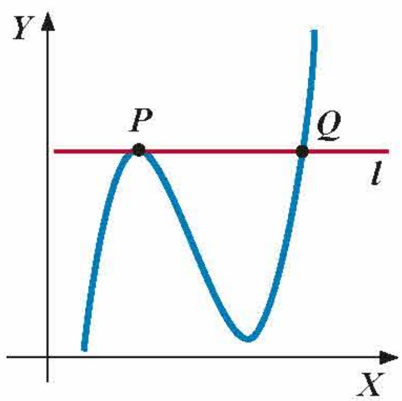
$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

El límite existe y esto lo denotamos analíticamente porque la

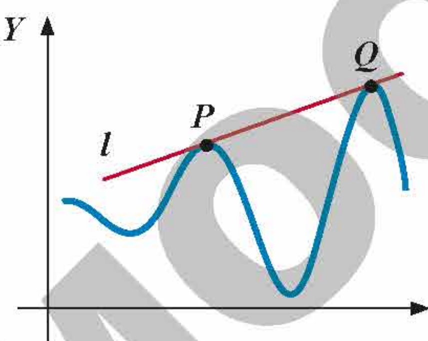
$$pendiente\ de\ la\ tangente\ a\ la\ gráfica\ de\ f\ en\ p = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La pendiente de l no se puede calcular como en el caso de las otras rectas porque sólo conocemos el punto P; sin embargo, el hecho de que las rectas determinadas por P y Q se aproximen a l significa que sus pendientes se aproximan a la pendiente de l.

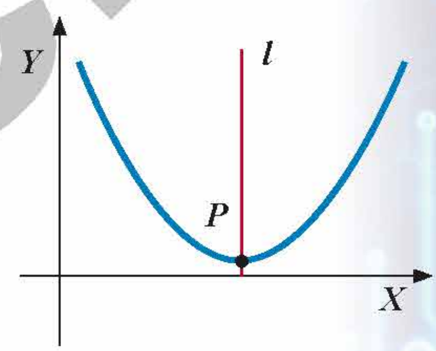
Nota: definimos a la tangente a una curva en un punto donde el límite de secantes de esa misma curva pasa por ese punto, y no como la recta que corta a la curva en un solo punto.



ℓ es tangente en P no en Q



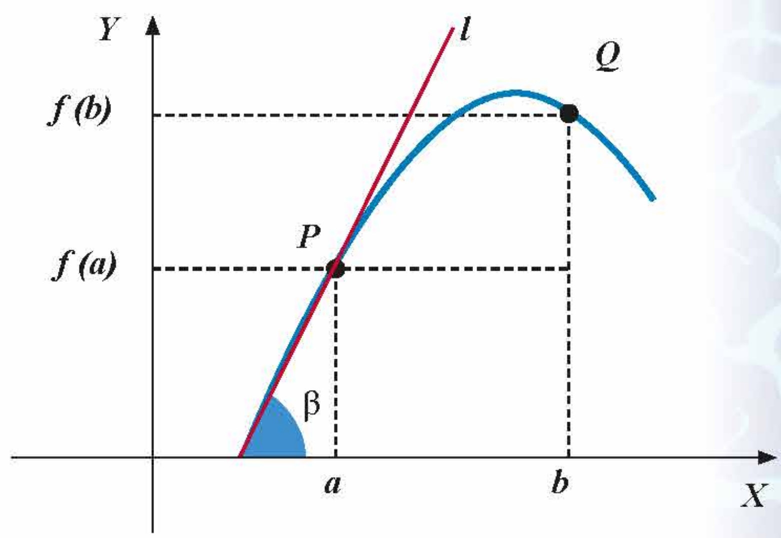
ℓ es tangente en P y Q



ℓ no es tangente en P

Si β es el ángulo formado por la tangente y el eje X, como se muestra en la siguiente figura y la ecuación sería:

$$\lim_{b \to a} (\tan \alpha) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan \beta$$



PROMOCIÓN

Definición: la ecuación de la recta tangente a la curva f en el punto $(a,f(a))$ es:

$$y - f(a) = \left(\lim_{b\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)(x - a)$$

Donde:

$$\lim_{b\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Es la pendiente de la tangente a la gráfica de f en $(a,f(a))$.

Definición: la ecuación de la recta normal a la curva f en el punto $(a,f(a))$ es:

$$y - f(a) = \left(\frac{-1}{\left(\lim_{b\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)}\right)(x - a)$$

Ya que la normal es perpendicular a la recta tangente en $(a, f(a))$, de donde, la pendiente de la normal es la recíproca negativa de la pendiente de la tangente.

Ejemplos

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes y normal de las siguientes funciones en los puntos indicados.

1. $f(x)=x^2+1$ en $a=4$

Solución:

Calculamos:

$$\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \frac{x^2 + 1 - ((4)^2 + 1)}{x - 4} = \frac{x^2 + 1 - 17}{x - 4} = \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = x + 4$$

Así:

$$\lim_{x\to 4}(x + 4) = 4 + 4 = 8$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - 17 = 8(x - 4)$$
$$y = 8x - 32 + 17$$
$$y = 4x - 15$$

Ecuación de la recta normal:

$$y - 17 = -\frac{1}{8}(x - 4)$$
$$y = -\frac{x}{8} + \frac{1}{2} + 17$$
$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{35}{2}$$

PROMOCIÓN

2. $f(x)=x^3$ en $a=3$.

Solución:

Calculamos:

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{x^3-(3)^3}{x-3}=\frac{x^3-27}{x-3}=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=x^2+3x+9 \;\; si\; x\neq 3$$

De donde:

$$\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)=(3)^2+3(3)+9=27$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\mathbf{\lim_{x\to 4}\frac{x^2-27}{x-3}=27}$$

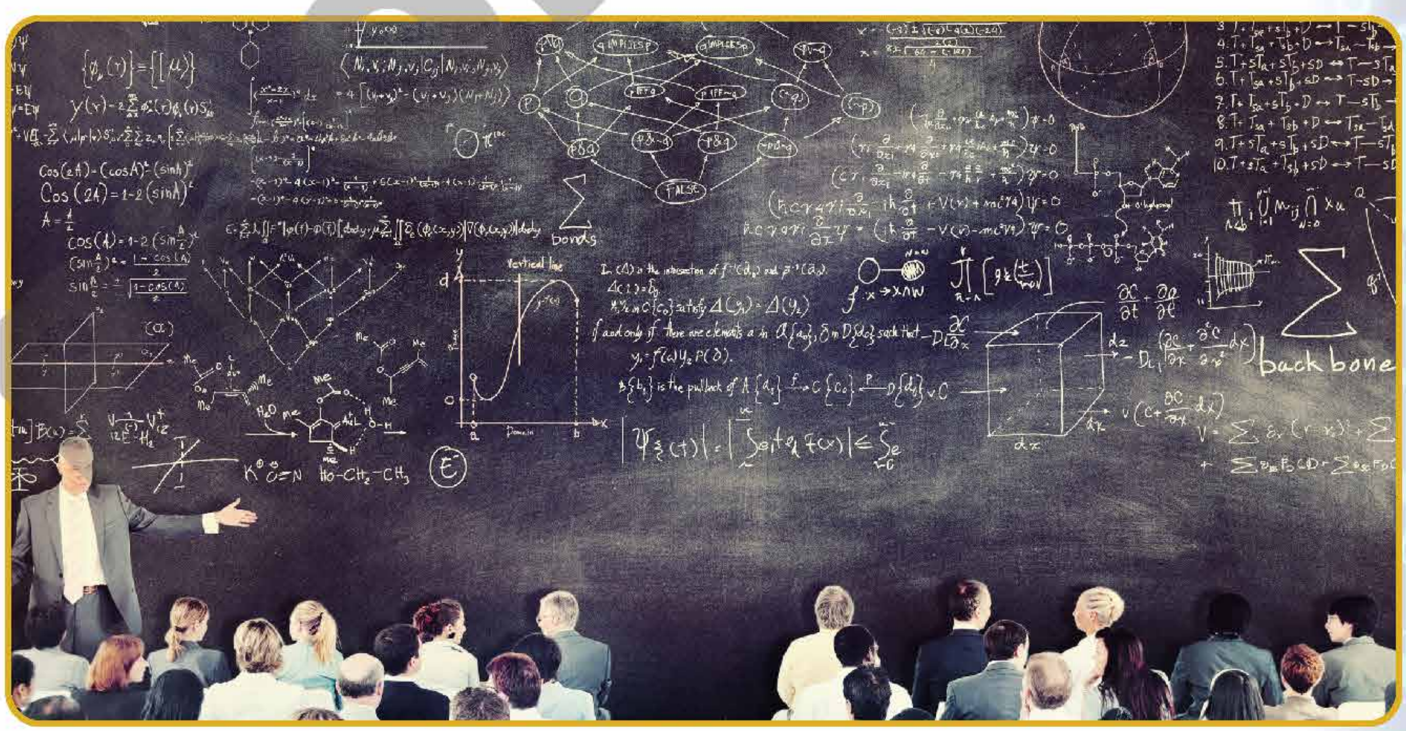
Ecuación de la recta tangente:

$$y-27=27(x-3)$$
$$y=27x-81+27$$
$$\mathbf{y=27x-60}$$

Ecuación de la recta normal:

$$y-27=-\frac{1}{27}(x-1)$$
$$y=-\frac{x}{27}+\frac{1}{27}+27$$
$$\mathbf{y=-\frac{1}{27}x+\frac{730}{27}}$$

PROMOCIÓN



3. $f(x)=\sqrt{x}$ en $a=5$.

Solución:

Calculamos:

$$\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}=\left(\frac{\sqrt{x}-5}{x-5}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\right)=\frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\quad si\ x\neq 5$$

De donde:

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\boxed{\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}=\frac{1}{2\sqrt{5}}}$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y-\sqrt{5}=\frac{1}{2\sqrt{5}}(x-5)$$
$$y=\frac{x}{2\sqrt{5}}-\frac{3}{2\sqrt{5}}+\sqrt{5}$$
$$y=\frac{x}{2\sqrt{5}}+\left(\frac{-5+\left(2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{5}}\right)=\frac{x}{2\sqrt{5}}+\left(\frac{-5+(2\times 5)}{2\sqrt{5}}\right)$$

$$\boxed{y=\frac{x}{25}+\frac{5}{2\sqrt{5}}}$$

Ecuación de la recta normal:

$$y-\sqrt{5}=-2\sqrt{5}(x-5)$$
$$y=-2\sqrt{3}x+10\sqrt{5}+\sqrt{5}$$
$$y=-2\sqrt{3}x+\sqrt{5}(10+1)$$

$$\boxed{y=-2\sqrt{5}x+11\sqrt{3}}$$

PROMOCIÓN

Actividad de aprendizaje

En equipos de 4 integrantes resuelvan los siguientes ejercicios.

1. $f(x)=x^2+1$ en $a=2$.

Solución:

Calculamos:

Así:

Por lo tanto:

Ecuación de la recta tangente

Ecuación de la recta normal:

PROMOCIÓN

2. $f(x)=x^3$ en $a=1$.

Solución:

Calculamos:

De donde:

Ecuación de la recta tangente:

Ecuación de la recta normal:

3. $f(x)=\sqrt{x}$ en $a=3$.

Solución:

Calculamos:

De dónde

Por lo tanto:

Ecuación de la recta tangente

Ecuación de la recta normal:

PROMOCIÓN

Evaluación continua y formativa

Evaluar 5E

Tabla de niveles de desempeño del estudiante

Nivel de desempeño	Valoración de los criterios	Referencia numérica
A Destacado	Cinco criterios demostrados	**10**
B Satisfactorio	Cuatro criterios demostrados	**9**
C Suficiente	Tres criterios demostrados	**8**
	Dos criterios demostrados	**7**
D Requiere apoyo	Un criterio demostrado	**6**

Lista de cotejo para los ejercicios y problemas realizados

Propósito de la progresión:
Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado

Objetivo:
Los estudiantes resuelven problemas de cálculo para hallar las rectas tangentes y normales de las funciones dadas en los puntos indicados en cada ejercicio.

Criterios de evaluación	Sí	No
a) Los estudiantes comprenden el tema de la derivada y aplican los conocimientos adquiridos al resolver los ejercicios planteados.	☐	☐
b) Los estudiantes son capaces de aplicar las definiciones de recta tangente y recta normal para resolver los ejercicios que se les pide.	☐	☐
c) Los estudiantes resuelven los problemas y encuentran el límite de la función en el punto dado, la recta tangente y la recta normal, en colaboración con sus compañeros y sin ayuda del profesor.	☐	☐
d) Los estudiantes trabajan en equipo para realizar correctamente el trabajo que se les pide.	☐	☐
e) Los estudiantes llegan al resultado correcto.	☐	☐

PROMOCIÓN

Progresión de aprendizaje **3**

Funciones

Equipaje de mano

Metas
M1.3
Categorías
C3
Subcategorías
S1.2

ABORDAJE
(INICIO)

5E Enganchar

A. Lee el siguiente texto, discútelo en clase y responde las preguntas.

Volcán Popocatépetl, más conocido como Don Goyo

En México hay 46 volcanes activos, seis de ellos considerados de alto riesgo, porque se encuentran muy cercanos a diversos pueblos. Por ello, todos los días, especialistas monitorean la actividad volcánica para prevenir un desastre.

El volcán Popocatépetl se monitorea desde el Centro Nacional de Prevención de Desastres Naturales (Cenapred).

Este volcán llamado cariñosamente "Don Goyo", está ubicado en los límites de Puebla, Estado de México y Morelos, y está vigilado las 24 horas. "Siempre hay alguien custodiándolo los 365 días", mencionan los vulcanólogos del área de investigación de riesgos volcánicos de Cenapred.

La observación del volcán Popocatépetl se realiza desde el Laboratorio de Monitoreo de Fenómenos Naturales (LMFN), un lugar de ochenta metros cuadrados lleno de mapas, computadoras y pantallas en donde se ven los datos que arrojan cámaras de video y sismómetros. A partir de esta información, se evalúa si la actividad del volcán representa un riesgo, y de ser necesario se notifica a la Coordinación Nacional de Protección Civil y a los habitantes cercanos al "Popo".

¿Cómo se monitorean los volcanes?

De manera semejante a cuando acudimos a un especialista para conocer nuestro estado de salud, los volcanes están bajo el resguardo de especialistas, quienes con diversos métodos de monitoreo observan su actividad.
Ejemplo. El monitoreo sísmico permite observar dentro del volcán, y saber cuando expulsa lava, cenizas y gases generando pequeños movimientos en la tierra que sólo son percibidos por los sismómetros.

Promoción

Alrededor del volcán Popocatépetl hay una red de 16 sismómetros electrónicos que, en tiempo real, envían información de forma inalámbrica al Cenapred, donde analizan los datos. Nueve cámaras rodean al "Popo" y lo retratan constantemente para que los especialistas detecten a tiempo explosiones y emisiones de cenizas y gases. Dos inclinómetros ayudan a medir la pendiente del suelo, pues cuando el material asciende, cambia el suelo y aumenta la inclinación. Es como si el volcán se "inflamara".

Por último, el monitoreo geoquímico obliga a los expertos a recorrer las faldas del volcán en búsqueda de muestras de cenizas y gases. Mensualmente toman muestras de los cuerpos de agua cercanos al volcán para analizar su composición. "Con los manantiales se realiza una vez al mes y se busca, el elemento del boro.

1. Escribe el origen y qué hace la Cenapred.

2. Investiga de qué manera las funciones matemáticas se relacionan con el monitoreo del volcán.

3. Escribe tres noticias importantes sobre el Popocatépetl. Recuerda poner las fuentes

PROMOCIÓN

Explorar 5E

Actividad de aprendizaje

A. En equipos de 5 integrantes, relean el artículo y contesten las siguientes preguntas

1. ¿Cuántos volcanes activos hay en México?

2. ¿Cuántos de estos son considerados de alto riesgo y por qué?

3. ¿Por qué los especialistas monitorean la actividad volcánica todos los días?

4. ¿Qué significa Cenapred?

5. ¿Desde dónde se observa y monitorea el volcán Popocatépetl?

PROMOCIÓN

6. ¿Qué contiene el laboratorio de monitoreo de fenómenos naturales (LMFN), con cuantos metros cuadrados cuenta y qué se hace con la información que recaba?

7. ¿Qué elementos se buscan en los manantiales y por qué?

8. ¿Cómo se relaciona este tema con las funciones de variable real?

9. ¿Cómo se monitorean los volcanes? Explica de manera detallada.

PROMOCIÓN

5E Explicar

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

Funciones

Funciones de variable real

El concepto de función tiene un significado muy importante en las matemáticas, ciencias y tecnología, se utiliza en todas las ramas asociadas a las Matemáticas contemporáneas, de ahí su gran generalidad. En Física permite modelar la evolución de los fenómenos naturales como la distribución de temperaturas en cada punto de una superficie, para predecir el clima; en Economía para estimar el valor de productos en función de la inflación en unos cuantos meses; en Matemáticas nos ayuda a generalizar reglas para sintetizar procedimientos matemáticos. Las funciones nos permiten establecer la relación entre variables. Aquí se trabajará con funciones reales, es decir, haremos una correspondencia entre dos valores reales.

¿SABÍAS QUÉ?...

Para Descartes las funciones fueron una herramienta fundamental para el estudio de curvas geométricas, Galileo las utilizó para los cálculos astronómicos y mecánicos. Leibniz y John Bernoulli propusieron la palabra *functio* mientras que Euler (1734) introdujo el símbolo.

Para hablar de funciones es necesario tomar ciertas consideraciones que nos permitirán dar dos definiciones equivalentes. Por una parte, se retoma el significado de conjuntos para poder explicar la diferencia entre una relación y una función. En matemáticas estas palabras no tienen el mismo significado que en la vida cotidiana. **Ejemplo.** "La relación entre México y Estados Unidos es un mal necesario", "La función del profesor de cálculo es que los estudiantes aprendan y entiendan los conceptos de esta materia".

En Matemáticas **relación** y **función** se definen como una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, es decir, la formación de "pares ordenados de entes" cualesquiera: números, figuras geométricas, personas, etcétera.

Una relación se define como un elemento de un conjunto $\boldsymbol{A}$ al cual se le puede asignar uno o más elementos de otro conjunto $\boldsymbol{B}$.
Cuando vas a un concierto, al teatro, al cine y compras un boleto te venden y asignan, boletos que se localizan por una letra y un número (asigna asiento), así tú puedes comprar la localidad *(A,8)*, *(A,9)*, *(F,15)*, *(H,34)*, etcétera. Son parejas ordenadas formadas por letras y números, y esta correspondencia es una relación porque a una misma fila le corresponden varios asientos.

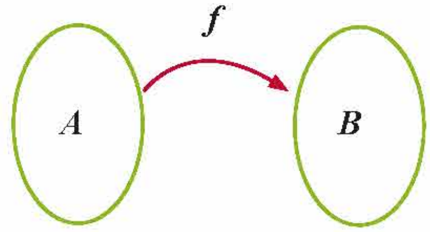
Una función se define como un elemento de un conjunto $\boldsymbol{A}$ al cual se le puede asignar uno y solo uno de los elementos del conjunto $\boldsymbol{B}$. Entonces, se dice que $\boldsymbol{B}$ es función de $\boldsymbol{A}$.

Se establece una función de un conjunto $\boldsymbol{A}$ en un conjunto $\boldsymbol{B}$, cuando se da una regla (criterio o ley) a través de la cual asociamos a cada elemento $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{A}$ un único elemento y de $\boldsymbol{B}$; A dicha regla se le denomina la regla de correspondencia o de asociación de la función y se le denota por una letra, por ejemplo $\boldsymbol{f}$, es decir:

$$f: A \to B \qquad\qquad a \mapsto b = f(a)$$

PROMOCIÓN

Observamos que, para tener una función, debemos tener 2 conjuntos, que pueden ser iguales entre sí, y una regla de correspondencia con las características antes descritas. Ver la siguiente figura.



Cuando no hay lugar a confusión, nos referimos a la función mediante la letra que usamos para su regla de correspondiente; **Ejemplo.** Hablar simplemente de la función *f*.

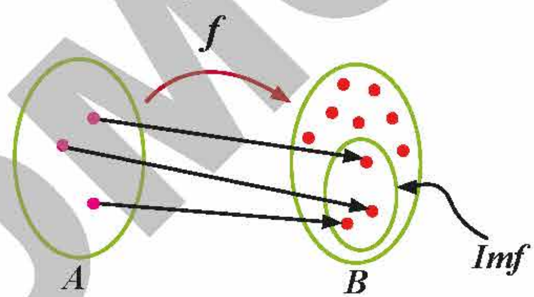
El conjunto $\boldsymbol{A}$ es llamado el dominio de la función y lo denotamos como *Dom* $\boldsymbol{f=A}$.
El conjunto $\boldsymbol{B}$ es llamado el condominio contra dominio de la función $\boldsymbol{f}$.

Se acostumbra a denotar por $\boldsymbol{f(x)}$ al elemento y de $\boldsymbol{B}$ que está asociado al elemento $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{A}$ a través de $\boldsymbol{f}$. Usamos las siguientes expresiones para referirnos a $\boldsymbol{f(x)}$: $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$, el valor que toma $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$ y la imagen de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$.

Para cualquier función $f: A \to B$, definimos la imagen o rango de la función $\boldsymbol{f}$ como la colección de todos los elementos $\boldsymbol{f(x)}$, con x en $\boldsymbol{A}$. Este conjunto se denota por $\boldsymbol{f(A)}$ o bien $\boldsymbol{Im\,f}$, así:

$$Im\,f = \{b \in B \mid b = f(a)\ para\ alguna\ a \in A\}$$

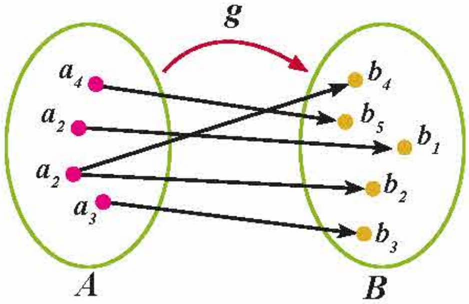
Es claro que $\boldsymbol{Im\,f}$ es un subconjunto del condominio $\boldsymbol{B}$ y puede suceder que $\boldsymbol{Im\,f}$ sea un subconjunto propio del condominio, es decir, que sea un subconjunto del condominio que no coincida con él, lo cual se denota por $\boldsymbol{Im}\ f \subsetneq B$; tal es el caso para la función representada en la siguiente figura:



Aquí, $\boldsymbol{Im\,f}$, eso en su conjunto propio del condominio.

$$f: A \to Im\,f \subset B$$

Ejemplos:
1. ¿Será $g: A \to B$ una función?



g no es función ya que a_2 va a b_2 y a b_4.

PROMOCIÓN

2. Sean $A=\{3,4,5\}, B=\{5,6,7\} h: A \to B$ dada por

$$h(3) = 5, \qquad h(4) = 6, \qquad h(5) = 7$$

entonces h es función.

3. Sean $A=\{1,3,5\}, B=\{7,9,11\} g: A \to B$ dada por

$$g(1) = 7, \qquad g(3) = 9, \qquad g(5) = 11$$

entonces g es función.

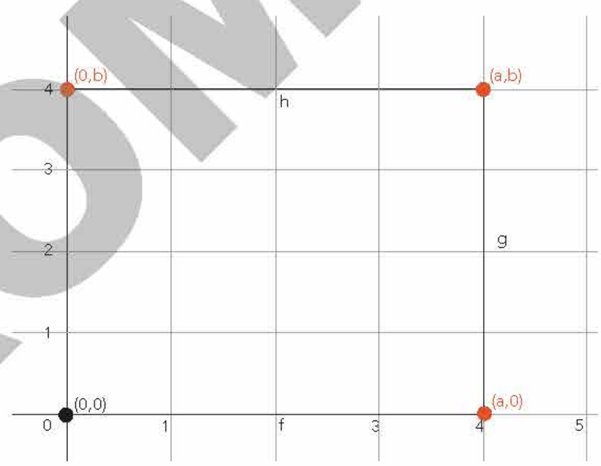
Cuando el dominio de una función es infinito, no se puede dar explícitamente la regla de correspondencia por lo que, se utilizan fórmulas o conjuntos de fórmulas.

Ejemplos:

1. $f(x) = 9x - 11$
2. $g(x) = x^2 + 5x + 6$
3. $h(x) = \{x^2 - 4x + 3 \ \ si - 1 \leq x < 5 \ x^3 + 8x - 5 \ \ si \ 5 \leq x < 10$
4. $j(x) = \{x + 8 \ \ si \ x \in (-\infty, 3) \ x - 1 \ si \ x \in (-2, \infty) \ \ f \ no \ es \ función \ ya \ que \ f(0) = 8 \ y \ f(0) = -1$

Grafica de una función

El mayor interés no es un método para dibujar números, sino pares de números, es decir, dos líneas rectas que se cortan en ángulo recto, distinguiéndolas como eje horizontal y vertical; se puede designar a los puntos del eje horizontal mediante pares $(a, 0)$ y para los puntos del eje vertical a través de pares $(0, b)$. Cualquier punto (a, b) se podrá trazar como se muestra en la figura, formándose un cuadrado, para designar los vértices por $(0, 0), (a, 0), (a, b), (0, b)$.



Los números a y b reciben los nombres de primera y segunda coordenada del punto determinado, de esta manera al eje horizontal se le conoce como eje de las abscisas, y al vertical como eje de las ordenadas. Por lo tanto, el primero ***(eje x)*** representa al dominio de la función y el segundo ***(eje y o f (x))*** el contra dominio, es decir, el punto $P\,(x, y)$ o $P\,(x, f\,(x))$, pues $y = f\,(x)$.

Es importante comprender que el método para trazar una función se reduce a trazar cada uno de los pares de esta. El dibujo así obtenido se llama gráfica de una función. Los pares $(x, f\,(x))$ corresponden a todos los puntos que contiene la gráfica y como los pares son infinitos, puede parecer que hacer esto sea algo muy laborioso, pero muchas funciones son fáciles de dibujar.

PROMOCIÓN

Definición. Si f es una función, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x,y) o $(x, f(x))$ para los cuales (x, y) es un par ordenado en f.
x es la distancia dirigida hacia el eje y mientras que $f(x)$ es la distancia dirigida a partir del eje x.
Una forma más formal de definir la gráfica de una función es la siguiente:

Cualquier colección de puntos en el plano es llamado gráfica. Entre estas nos interesan las llamadas gráficas de funciones.

Consideremos una función real de variable real $f: A \to B$. Al localizar en el plano los puntos correspondientes a las siguientes parejas:

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x, y) \mid x \in A, \quad y = f(x)\}$$

Obtenemos la llamada gráfica de la función f. Para que un punto (x,y) del plano esté en la gráfica se requieren 2 cosas:

* 1. x es un punto del dominio de f, que en este caso es A.
* 2. y es el asociado de x, o sea, $y=f(x)$.

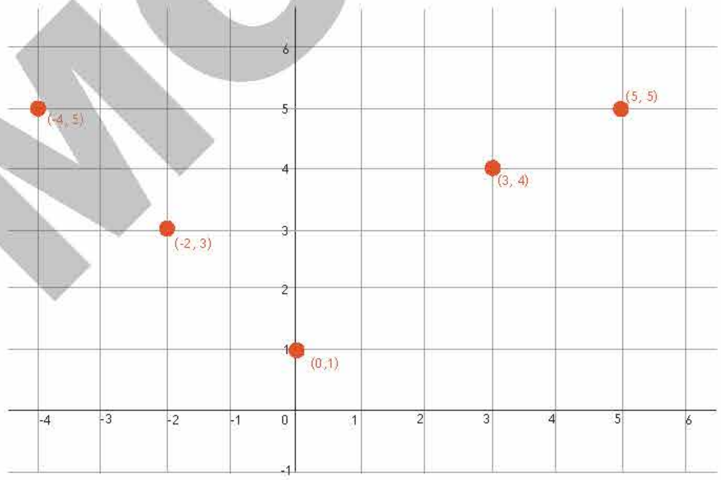
Observación:

Si $y \neq z$, en la gráfica de f no puede haber dos puntos distintos (x, y), (x, z) con la misma abscisa x, pues en este caso hay dos asociados, y y z, al mismo elemento x y esto no es posible porque f es una función.

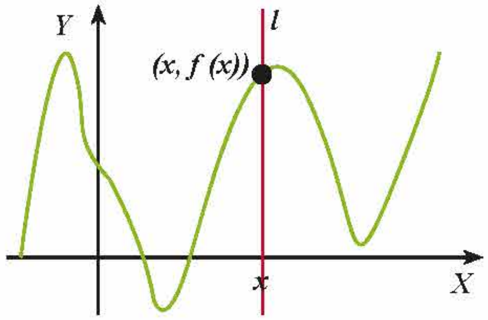
Ejemplo:

a) Dibujar la gráfica de la función

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-4	5	(-4, 5)
-2	3	(-2, 3)
0	1	(0, 1)
3	4	(3, 4)
5	5	(5, 5)



Una forma de saber si la gráfica dibujada es una función es trazar una recta vertical l paralela al eje y observar si hay que cortar o no en un solo punto, es decir, una recta vertical l corta la gráfica de una función en sólo un punto de intersección, pues como señalamos, en la gráfica de función no puede haber dos puntos distintos con la misma abscisa x, como se observa en la siguiente figura.



PROMOCIÓN

Funciones reales de variable real

Este tipo de funciones es frecuentemente usado debido a que las formas que establecemos para relacionar dos cantidades son a fin de cuentas fórmulas que relacionan números, que a su vez son medidas de esas cantidades respecto a las unidades preestablecidas. Para medir, fijamos ciertas unidades y asociamos un número de estas al objeto sujeto a medición. Es decir, si determinado individuo pesa 90 kilogramos y mide 1.85 metros, corrió a razón de 10 metros por segundo.

La regla de correspondencia de las funciones reales de variable se da en general mediante fórmulas o combinaciones de ellas.

Ejemplo:
Considere la función

$$f(x) = 3x \quad si\ x \in [-1, 6]$$

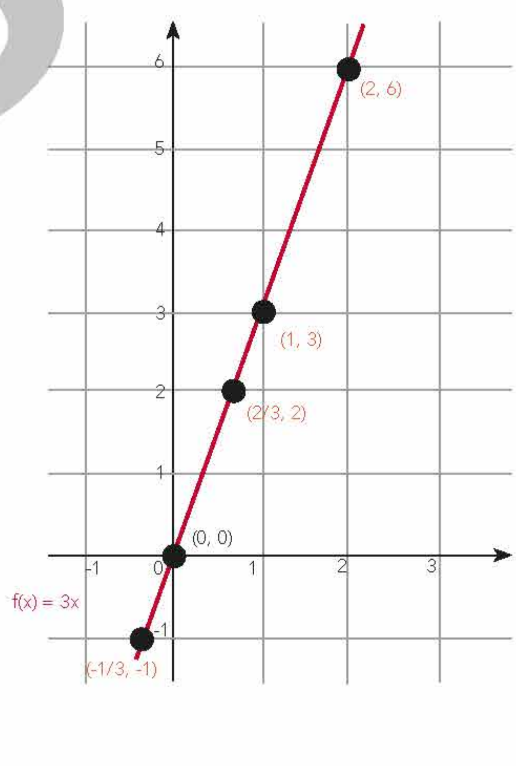
Encontrar las imágenes correspondientes a los valores $x = -\frac{1}{3}, 0, 2/3$ 1, 2

Solución:
En este caso si el dominio es el intervalo *[-1,6]*, usamos la formula $\boldsymbol{f(x)=3x}$, así

$$-1/3 \in [-1, 6], por\ lo\ tanto\ f(x) = 3x$$
$$f(-1/3) = 3(-1/3) = -1$$
$$0 \in [-1, 6], por\ lo\ tanto\ f(x) = 3x$$
$$f(0) = 3(0) = 0$$
$$2/3 \in [-1, 6], por\ lo\ tanto\ f(x) = 3x$$
$$f(2/3) = 3(2/3) = 2$$
$$1 \in [-1, 6], por\ lo\ tanto\ f(x) = 3x$$
$$f(1) = 3(1) = 3$$
$$2 \in [-1, 6], por\ lo\ tanto\ f(x) = 3x$$
$$f(2) = 3(2) = 6$$

La gráfica de la función se obtiene al localizar los puntos $\boldsymbol{(x, f(x))}$ sobre cada porción del dominio, de acuerdo con la regla establecida de la función.

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-1/3	-1	(-1/3, -1)
0	0	(-0, 0)
2/3	2	(2/3, 2)
1	3	(1, 3)
2	6	(2, 6)



PROMOCIÓN

Ejemplos de funciones:

El volumen de una esfera de radio r es $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

La ecuación que describe la caída libre es $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$

Dónde d es la distancia recorrida en el tiempo t, g es la gravedad y t es el tiempo.

La hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $n+1$ y $n+4$

$$h(n) = \sqrt{(n+1)^2 + (n+4)^2}$$

Tipos de funciones reales de variable real.

Una función polinomial es de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Dónde $a_1 \in R$, $a_n \neq 0\ y\ n \in N$. Su dominio natural es R.
El grado de la función polinomial es $n\ si\ a_n \neq 0\ y\ a_k = 0\ para\ k > n$.
Sí $n=0$ es una función constante.

Ejemplos:

$$f(x) = -73x^6 + 49x^5 - 25x^4 + 87x^3 - 40x^2 + 36x - 21$$

$$g(x) = 41x^9 + 53x^7 - 18x^5 + 92x^3 - 86x + 8$$

Una función racional es de la forma:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde F y G son funciones polinomiales. Su dominio natural es $\{x \in R \mid g(x) \neq 0\}$

Ejemplos:

$$h(x) = \frac{-73x^6 + 49x^5 - 25x^4 + 87x^3 - 40x^2 + 36x - 21}{37x^3 - 94x^2 - 52x + 78}$$

$$j(x) = \frac{41x^9 + 53x^7 - 18x^5 + 92x^3 - 86x + 8}{-14x^8 + 35x^6 - 81x^4 + 29x^2 - 29}$$

Raíces *n-ésima*. Si a es un número real y n eso un número natural, decimos que un *real b* hoy es una *raíz n-ésima* de a sí

$$b^n = a$$

Si n es par y a mayor a cero, a tiene dos *raíces n-ésimas*. **Ejemplo.** -2 y 2 son raíces cuartas de 16.
Y si $a<0$, a no tiene *raíz n-ésima*, es decir, si $a=-9$, no hay ningún número real cuyo cuadrado sea -9.

Así, si n es par, definimos la función *raíz n-ésima*

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

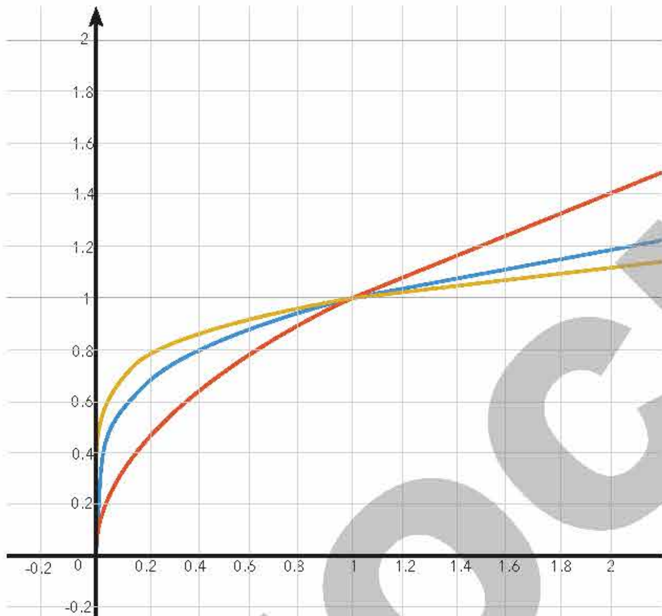
PROMOCIÓN

Cómo es la *raíz n-ésima* no negativa de x. Su dominio es $[0,\infty)$.

Ejemplos:

$$f(x) = \sqrt[2]{x}$$
$$g(x) = \sqrt[4]{x}$$
$$h(x) = \sqrt[6]{x}$$

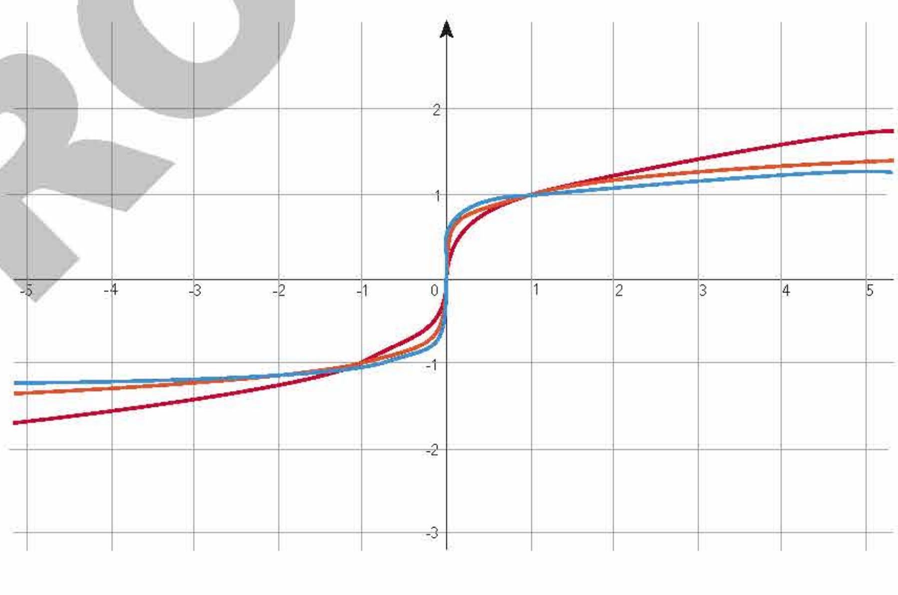
En la siguiente figura se muestra las gráficas de funciones con raíces pares de : $\sqrt[2]{x}, \sqrt[4]{x}, \sqrt[6]{x}$.



Si n es impar, para cualquier número a hay una única *raíz n-ésima*. **Ejemplo.** 2 es la única raíz cúbica de 8, y -2 es la única raíz cúbica de –8.

En este caso, la función raíz enésima $f(x) = \sqrt[n]{x}$ se define como $x \in R$.

En la siguiente figura se muestran las gráficas de funciones con raíces impares de $\sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x}$



PROMOCIÓN

Potencias con exponente racional

Si $r = \frac{m}{n}$ Hoy es un número racional simplificado (m y n no tienen factores comunes), definimos

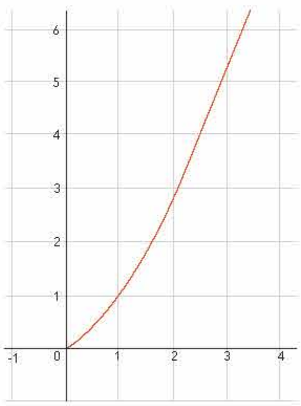
$$f(x) = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$$

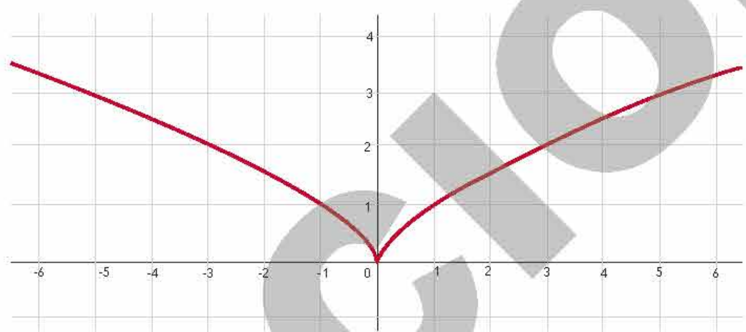
Cuando n es par, su dominio es $[0,\infty)$, y cuando n es impar su dominio es todo R.

Ejemplos.

$$f(x) = \sqrt[2]{x^3} \ \ y \ g(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

Y sus gráficas respectivas son las siguientes





Las funciones polinomiales, cocientes de polinomios, raíces de polinomios o cualquier combinación usando los símbolos $+, -, \times, \div, \sqrt[n]{}$, es llamada función algebraica.

Función trascendente

No es suma, producto, cociente o raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros.

Ejemplos:

Funciones trigonométricas

Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	cosecante
$sen(x)$	$cos(x)$	$tan(x)$	$cot\ (x)$	$sec\ (x)$	$csc\ (x)$

Funciones trigonométricas inversas

Arco seno	Arco coseno	Arco tangente	Arco cotangente	Arco secante	Arco cosecante
$arcsen\ (x)$	$arccos\ (x)$	$arctan\ (x)$	$arccot\ (x)$	$arcsec\ (x)$	$arccsc\ (x)$

Logaritmo natural	Logaritmo base b
$ln\ ln\ (x)$	(x)

Funciones logarítmicas

Exponencial base e	Exponencial base b
e^x	b^x

PROMOCIÓN

Operaciones con funciones

Pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse, dando lugar a otras funciones. Las operaciones con funciones se pueden realizar de manera muy sencilla, siendo necesario aplicar de manera correcta el proceso algebraico que permitirá calcular cada una de las operaciones con dichas funciones. **Ejemplo.**

Suma

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \;\; si \; x \in Dom\, f \cap Dom\, g$$

Producto $\quad (fg)(x) = f(x)g(x) \;\; si \; x \in Dom(fg) = Dom\, f \cap Dom\, g$

Definición: si f es una función real, $\frac{1}{f}$ la función con dominio de los elementos $x \in Dom\, f$ es $f(x) \neq 0$ por lo que la regla de correspondencia es:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Entonces:

$$\left(f\left(\frac{1}{f}\right)\right)(x) = f(x)\frac{1}{f(x)} = \frac{f(x)}{f(x)} = 1 \;\; con \; x \in Dom\, f \; y \; f(x) \neq 0$$

Definición: Si f y g son funciones reales:

$$\left(f\left(\frac{1}{g}\right)\right)(x) = f(x)\frac{1}{g(x)} \;\; con \; x \in Dom\, f \cap Dom\, g \; y \; g(x) \neq 0$$

Ejemplos

1. Si $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 11x + 9$ y $g(x) = 9x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 9$, encontrar $f+g$ y $f-g$.

Solución:

f y g son dos funciones polinomiales, por lo tanto, sus dominios son todos los reales, entonces, podemos sumar y restarlos sin ningún problema.

El dominio de $f+g$ es:

$$Dom\,(f+g) = R$$

Y la regla de correspondencia es:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) = f(x) + g(x) &= (5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 11x + 9) + (9x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 9)\\ &= 14x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x\end{aligned}$$

El dominio de f-g es:

$$Dom\,(f-g) = R$$

PROMOCIÓN

Y la regla de correspondencia es:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 11x + 9)\ - (9x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 9)$$
$$= -4x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 14x + 18$$

2. si $f(x) = \frac{x}{x^2-16}$ y $g(x) = \sqrt{x+3}$, encontrar $f+g$ $y\, fg$

Solución:

Cuando multiplicamos las funciones fg, necesitamos que $f \neq 0$, entonces:

$$x^2-16=0$$

Resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 16 = 0\ x^2 = 16\ \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{16}\ x = \pm 4$$

De donde $x=4$ o $x=-4$

Es decir, la función f está definida en $R \setminus \{-4, 4\}$

Para que la función g esté definida necesitamos que la raíz cuadrada sea mayor o igual a cero, es decir:

$$\sqrt{x+3} \geq 0\ x+3 \geq 0\ x \geq -3$$

O sea, el dominio de g es $[-3,\infty)$.

El dominio de fg es

$$Dom\,(fg) = \ x \in Dom(fg) = Dom\, f \cap Dom\, g\ y\ f(x) \neq 0$$
$$Dom\,(fg) = R \setminus \{-4, 4\} \cap [-3, \infty) = [-3, 4) \cup (4, \infty)$$

La regla de correspondencia es:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{x\left(\sqrt{x+3}\right)}{x^2-16}$$

Composición de funciones

La composición de g con f, denotada con $f \circ g$, también se lee g compuesta con f, o bien g seguida de f (advierta el orden), es la función cuyo dominio es:

$$\{x \in Dom\, g \mid g(x) \in Dom\, f\}$$

Y cuya regla de correspondencia es:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

PROMOCIÓN

Ejemplos:

Si $= x^3$ y $g(x) = x + 3$, encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución:

Primero, encontramos el dominio de la composición $f \circ g$:

$$Dom\ (f \circ g) = \{x \in Dom\ g \mid g(x) \in Dom\ f\}$$

$$= \{x \in R \mid x + 3 \in R\} = R$$

La regla de correspondencia es:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x+3) = (x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

Segundo, encontramos el dominio de la composición $g \circ f$:

$$Dom\ (g \circ f) = \{x \in Dom\ f \mid f(x) \in Dom\ g\}$$
$$= \{x \in R \mid x^3 \in R\} = R$$

La regla de correspondencia es:

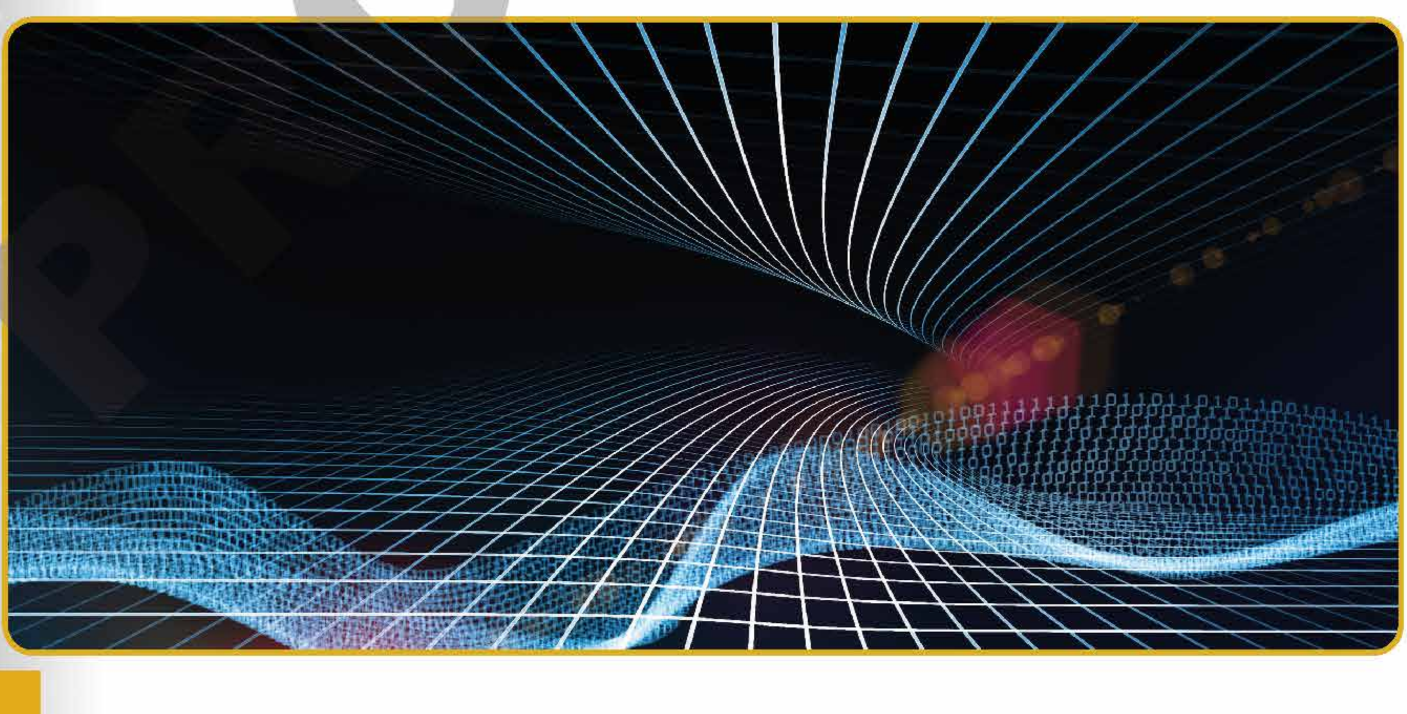
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^3) = (x)^3 + 3 = x^3 + 3$$

Por lo tanto,

$$(f \circ g)(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27;\ Dom\ (f \circ g) = R$$
$$(g \circ f)(x) = x^3 + 3;\ Dom\ (g \circ f) = R$$

Observación: Este ejemplo muestra que la composición de funciones no es conmutativa, es decir:

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$



PROMOCIÓN

Actividad de aprendizaje

Trabajo independiente:

A. Gráfica las siguientes funciones en los dominios que se te indican, evalúa y realiza la tabla de valores y grafica con los pares ordenados encontrados.

Ejercicio 1:

Considera la función constante $f(x) = 5 \quad si\ x \in [0, 5]$

Encuentra las imágenes correspondientes a los valores x=*0, 1, 2, 3, 4, 5*. Evalua la función en cada punto, traza la tabla y gráfica la función.

Solución:

$f(x)=5$	
x	$f(x)$
0	5
1	5
2	5
3	5
4	5
5	5

Ejercicio 2:

Considere la función lineal $f(x) = 2x + 1 \quad si\ x \in [-2, 3]$

Encontrar las imágenes correspondientes a los valores x=*-2, -1, 0, 1, 2, 3*. Evalua la función en cada punto, realiza la tabla y por último la gráfica de la función.

Solución:

$f(x)=2x+1$	
x	$f(x)$
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7

PROMOCIÓN

Ejercicio 3:

Considere la función cuadrática $f(x) = x^2 \quad si\ x \in [-3, 3]$

Encontrar las imágenes correspondientes a los valores $x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Evalua la función en cada punto, realiza la tabla y grafíca la función.

Solución:

$f(x)=x^2$	
x	$f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Ejercicio 4:

Considere la función radical $f(x) = \sqrt{x} \quad si\ x \in [0, 25]$

Encontrar las imágenes correspondientes a los valores $x=0, 1, 4, 9, 16, 25$. Evalua la función en cada punto, haz la tabla y grafíca la función.

Solución:

$f(x)=\sqrt{x}$	
x	$f(x)$
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5

PROMOCIÓN

Ejercicio 5:

Escribe cinco ejemplos de funciones que se aplican en la vida cotidiana.

Ejercicio 6:

Escribe dos ejemplos de cada tipo de funciones algebraicas (polinomiales, racionales, radicales cuando es par e impar, potencias con exponente racional) y funciones trascendentes (funciones trigonométricas, funciones trigonométricas inversas, funciones logarítmicas y funciones exponenciales, es decir, sumarle, multiplicar o dividirlas con funciones y escribir funciones en los argumentos).

PROMOCIÓN

Ejercicio 7:

Realiza un cuadro sinóptico de los tipos y clasificaciones de funciones con sus características.

PROMOCIÓN

B. En equipos de cuatro estudiantes resolver los siguientes ejercicios

Ejercicio 8:

Si $f(x) = 50x^5 - 35x^4 + 17x^3 - 21x^2 + 90x + 80$ y $g(x) = 6x^5 + 75x^4 - 55x^3 + 36x^2 - 9x - 50$, encontrar $f + g$ y $f - g$.

Solución:

Ejercicio 9:

si $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$, encontrar $f + g$ y fg

Solución:

PROMOCIÓN

Ejercicio 10:

Si $= x^2$ y $g(x) = x + 1$, encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución:

PROMOCIÓN

Evaluación continua y formativa

5E Evaluar

Tabla de niveles de desempeño del estudiante

Nivel de desempeño	Valoración de los criterios	Referencia numérica
A Destacado	Cinco criterios demostrados	**10**
B Satisfactorio	Cuatro criterios demostrados	**9**
C Suficiente	Tres criterios demostrados	**8**
	Dos criterios demostrados	**7**
D Requiere apoyo	Un criterio demostrado	**6**

Lista de cotejo para los ejercicios y problemas realizados

Propósito de la progresión:

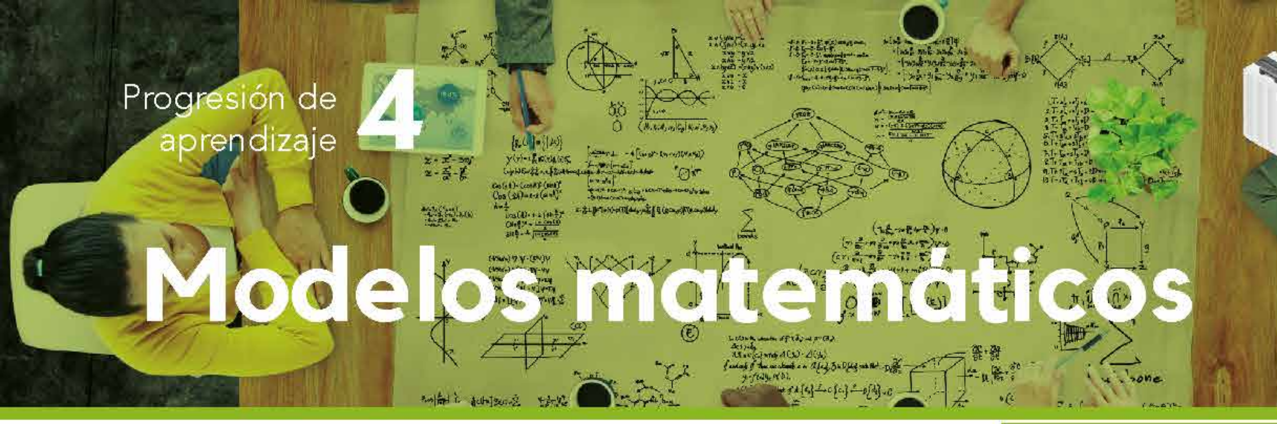
Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.

Objetivo:

Los estudiantes resuelven problemas de cálculo para hallar la gráfica de las funciones dadas, evaluando en los dominios dados, construyendo la tabla de valores y obteniendo los pares ordenados para poder dibujar la gráfica de las funciones pedidas en cada ejercicio. Escribe correctamente ejemplos de funciones aplicados en la vida cotidiana, realiza un cuadro sinóptico para clasificar los tipos de funciones y sus características, realiza operaciones básicas de suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones encontrando el dominio de las operaciones entre funciones donde es válida la operación y su regla de correspondencia.

Criterios de evaluación	Sí	No
a) Los estudiantes comprenden el tema de la derivada y aplican los conocimientos adquiridos al resolver los ejercicios planteados.	☐	☐
b) Los estudiantes son capaces de aplicar las definiciones de recta tangente y recta normal para resolver los ejercicios que se les pide.	☐	☐
c) Los estudiantes resuelven los problemas y encuentran el límite de la función en el punto dado, la recta tangente y la recta normal, en colaboración con sus compañeros y sin ayuda del profesor.	☐	☐
d) Los estudiantes trabajan en equipo para realizar correctamente el trabajo que se les pide.	☐	☐
e) Los estudiantes llegan al resultado correcto.	☐	☐

PROMOCIÓN



Progresión de aprendizaje **4**

Modelos matemáticos

Equipaje de mano

Metas
M1.1
Categorías
C2
Subcategorías
S1.1, S2.2

ABORDAJE
(INICIO)

5E Enganchar

Analiza la gráfica de funciones de la variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.

A. En equipos de cuatro integrantes, resuelvan el siguiente problema.

Supongamos que tenemos los siguientes datos de un móvil que recorre una distancia en distintos tiempos determinados

¿Qué modelo matemático modelaría la situación del móvil y cómo se predice la distancia para cualquier tiempo?

Apóyate de una hoja de cálculos o Excel para graficar los datos y encontrar la relación que guardan entre ellos.

	Tiempo (s)	Distancia (m)
1	5	30
2	10	60
3	15	90
4	20	120
5	25	150

PROMOCIÓN

Actividad de aprendizaje

Explorar 5E

A. En equipos de cuatro integrantes, observen el siguiente video y contesten las preguntas

1. ¿Qué es un modelo matemático?

2. ¿Cuál es el propósito de un modelo matemático?

3. ¿Qué tipos de problemas o fenómenos se pueden resolver con un modelo matemático?

4. ¿Cuáles son los pasos para seguir para la construcción de un modelo matemático?

5. ¿Cuántos tipos de modelos existen?

PROMOCIÓN

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

Modelación matemática

Es uno de los tipos de modelos científicos que emplea algún tipo de formalismo matemático para expresar relaciones, proposiciones sustantivas de hechos, variables, parámetros, entidades y relaciones entre variables de las operaciones para estudiar comportamientos de sistemas complejos ante situaciones difíciles de observar en la realidad.

Es así como el **modelo matemático** de un objeto (fenómeno real) es cualquier esquema simplificado e idealizado del constituido por símbolos y operaciones (relaciones). Es decir, un caso de formalización que utiliza los más diversos instrumentos producidos en la ciencia matemática. Además requiere de una descripción de cómo estos objetos se representan dentro del modelo y, viceversa.

En muchos casos la construcción o creación de modelos matemáticos útiles siguen los siguientes puntos:

1. **Identificación de un problema** o situación compleja que necesita ser simulada, optimizada o controlada y por tanto, requeriría un modelo matemático predictivo para hacer efectivo el mismo.
2. **Elección del tipo de modelo**, esto requiere precisar qué tipo de respuesta pretende obtenerse, cuáles son los datos de entrada o factores relevantes, y para qué pretende usarse el modelo.
3. **Formalización** del modelo en donde se detallarán qué forma tienen los datos de entrada, qué tipo de herramienta matemática se usará y como se adaptan a la información previa existente.
4. **Comparación de resultados:** al ser obtenidos como predicciones necesitan ser comparados con los hechos observados para ver si el modelo está prediciendo bien.

Es importante mencionar que la inmensa mayoría de los modelos matemáticos no son exactos y tienen un alto grado de idealización y simplificación, ya que una modelización muy exacta puede ser más complicada de tratar que una simplificación conveniente, y por lo tanto, resultar menos útil.

PROMOCIÓN

Características de la gráfica de una función

Simetría de una gráfica

Es útil saber si una gráfica tiene simetría antes de intentar trazarla porque ayuda a una visión apropiada.

Son tres las pruebas para determinar la simetría respecto a una gráfica.

La gráfica de una ecuación en ***x*** y ***y*** es simétrica respecto al eje y si al sustituir ***x*** por ***-x*** se obtiene una ecuación equivalente.

Esto significa que el eje ***y*** se comporta como un espejo, reflejando parte de la gráfica a la izquierda de este.

La gráfica de una ecuación en ***x*** y ***y*** es simétrica respecto al eje ***x*** si al sustituir y por ***-y*** se obtiene una ecuación equivalente.

Esto significa que la parte de la gráfica que está arriba del eje ***x*** es una imagen especular de la parte que esta abajo del mismo eje.

La gráfica de una ecuación en ***x*** y ***y*** es simétrica respecto al origen si al sustituir ***x*** por ***-x*** y ***y*** por ***-y*** se obtiene una ecuación equivalente.

Esto significa que la gráfica permanece inalterada por una rotación de 180º alrededor del origen.

En ambas partes se comprende que ***-x*** y ***-y*** están en el dominio de ***f*** siempre que ***x*** y ***y*** lo estén.

Ejemplo	Solución
Determinar la simetría de las siguientes funciones a) $x^4 - 8x^2 + 16$ ¿Es simétrica respecto al eje x?	$y = x^4 - 8x^2 + 16$ ecuación original $y = (-x)^4 - 8(-x)^2 + 16$ sustituyendo x por $-x$ $y = x^4 - x^2 + 16$ ecuación equivalente
b) $x - y^2 = 1$ ¿Es simétrica respecto al eje y?	$x - y^2 = 1$ ecuación original $x - (-y)^2 = 1$ sustituye y por $-y$ $x - y^2 = 1$ ecuación equivalente
c) $x^3 - 9x$ ¿Es simétrica respecto al origen?	$y = x^3 - 9x$ ecuación original $(-y) = (-x)^3 - 9(-x)$ sustituye x por $-x$ y y por $-y$ $-y = -x^3 + 9x$ simplifica $y = x^3 - 9x$ ecuación equivalente

PROMOCIÓN

Funciones par e impar

A la gráfica de una función se le puede agregar otra prueba relacionada con la simetría para saber si una función es par o impar

Una función es par si toda x en el dominio de la función es f

$$F(-x) = f(x)$$

Una función es impar si para toda x en el dominio de la función es f

$$f(-x) = -f(x)$$

En ambas partes se entiende que $-x$ está en el dominio de f siempre que x lo esté.

De acuerdo con los criterios de simetría, la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen y la gráfica de una función par es simétrica respecto al *eje y*, como se muestra en las siguientes figuras.

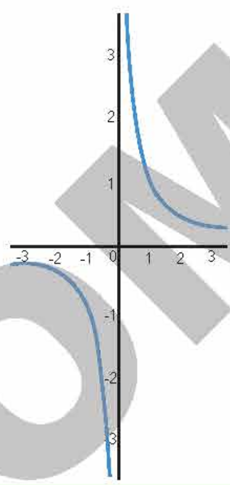
Función par

$f(-x) = f(x)$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(-x) = \dfrac{1}{-x}$

$f(-x) = -\dfrac{1}{x}$



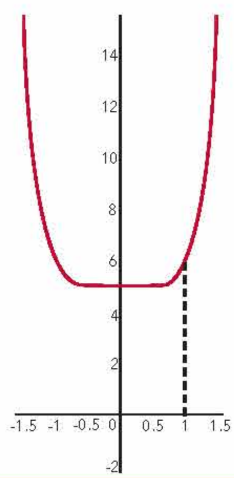
Función par

$f(-x) = f(x)$

$f(x) = x^6 + 5$

$f(-x) = (-x)^6 + 5$

$f(-x) = x^6 + 5$



Ejemplo	Solución
Determina qué tipo de funciones son par, impar o ninguna en los siguientes incisos: Si $f(x) = 5x4 - 3x2 + 7$	Entonces: $f(-x) = 5(-x)4 - 3(-x)2 + 7$ sustituyendo x por $-x$. $f(-x) = 5x4 - 3x2 + 7$ por lo tanto, f es una función par.
Si $g(x) = 3x7 + 5x5 - 7x3$	Entonces: $g(-x) = 3(-x)7 + 5(-x)5 - 7(-x)3$ sustituyendo x por $-x$. $g(-x) = -3x7 - 5x5 + 7x3$ simplificando. $g(-x) = -(3x7 + 5x5 - 7x3) = -g(x)$ por lo tanto, f es una función impar.
Si $h(x) = 3x4 + 4x3 - 5x2 + 6$	Entonces: $h(-x) = 3(-x)4 + 4(-x)3 - 5(-x)2 + 6$ sustituyendo x por $-x$. $h(-x) = 3x4 - 4x3 - 5x2 + 6$ la función h no es par ni impar tampoco.

PROMOCIÓN

Continuidad

Hablar de continuidad en una función es complicado, pues se necesita comprender y estudiar el concepto de límite aunque una función continua en Matemáticas son puntos cercanos al dominio que producen variaciones muy pequeñas en los valores de la función.

Continuidad y discontinuidad en un intervalo.

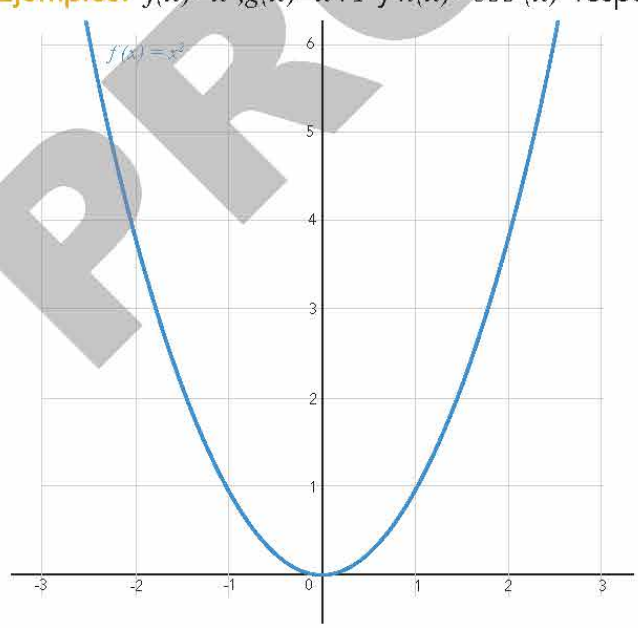
Una función $f(x)$ es continua en el interior del intervalo (a,b) de x, si es continua para todos los valores de x comprendidos en el intervalo. Si es discontinua para algún valor del intervalo la función es discontinua en el intervalo. Noción de función continua para $x=a$. Por lo tanto, una función $f(x)$ es continua para el valor $x=a$, si existe $f(a)$, existe límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ y ese límite es a

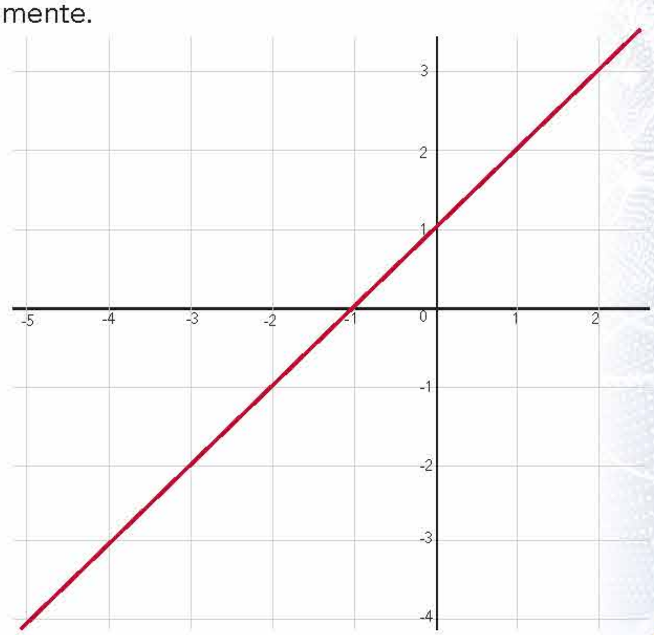
Ejemplo	Solución	Respuesta
Determina si la función $f(x)=x^2$ es continua en $x=2$	es continua porque	Existe $f(2)=2^2=4$ $\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2=4$
Determina si la función $f(x)=x+1$ es continua en $x=-3$	es continua porque	Existe $f(-3)=-3+1=-2$ $\lim_{x \to -3} x+1=-3+1=-2$
Determina si la función $f(x)=cos(x)$ es continua en $x=0$	es continua porque	Existe $f(0)=cos\,(0)=1$ $\lim_{x \to 0} cos\,(x) = cos\,(0)=1$

Gráfica de funciones continuas y discontinuas

La gráfica de una función continua en un intervalo se obtiene de un solo trazo para los valores de $\boldsymbol{x}$ de este intervalo. Desde el punto de vista geométrico, la representación de la función es la que se puede dibujar de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel.

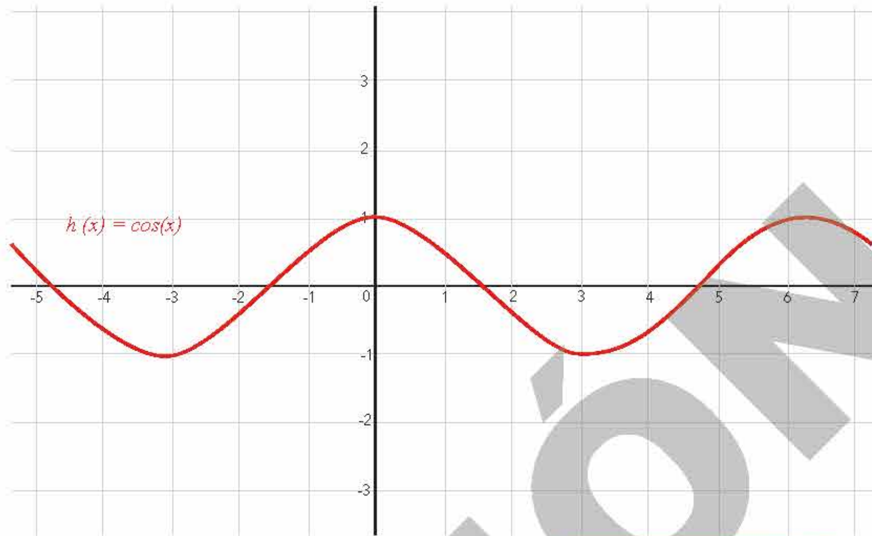
Ejemplos: $f(x)=x^2, g(x)=x+1$ y $h(x)=cos\,(x)$ respectivamente.





PROMOCIÓN

De manera sencilla, diremos que la curva representada por el conjunto de pares de puntos $(x,f(x))$, está constituida por un trazo continuo, que no tiene interrupciones en el trazo, no está perforada, y no tiene saltos bruscos o picos. Por lo tanto:



Una función $f(x)$ continua en un intervalo (a,b) toma valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, pero si $f(a)$ y $f(b)$ son de signo contrario la función se anula en algún punto de este intervalo.

Una función polinomial o entera en x es una función continua para todo valor de x.

La suma, la resta y la multiplicación son funciones continuas, sin embargo, funciones racionales sólo son continuas para los valores que no anulen el denominador.

PROMOCIÓN

En este punto es importante señalar que, aunque en este curso, solo se estudian las funciones continuas, desde un punto más general, éstas son un caso particular. Más adelante se hablará con detalle sobre funciones continuas y discontinuas después de que se estudie y comprenda el concepto de límite.

¿SABÍAS QUÉ?...

las funciones discontinuas son más interesantes, pues existen dos tipos de discontinuidades: **la esencial**, en la que no se puede hacer nada para evitar dicha discontinuidad; y **la evitable**, cuando la función no está definida en algún punto dentro del intervalo, pero se puede arreglar (simple algebrita).

Ejemplos de funciones discontinuas

$$f(x) = cot\,cot\,(x) \quad y \quad g(x) = \frac{1}{x+2}$$

Analizando la primera función:

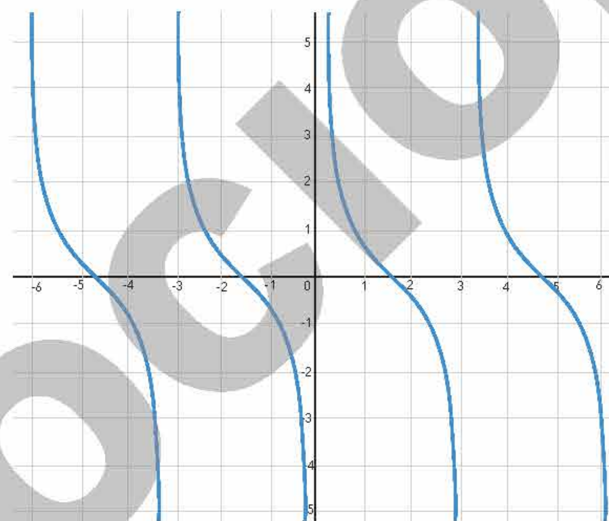
$$f(x) = cot\,(x) = \frac{cos\,(x)}{sen(x)}$$

Esto nos dice que la función es trascendental por lo que el dominio de la función sólo es válido en el caso que *(x)* sea diferente de cero, y esto solo sucede cuando $x=\pi$ o múltiplos de π, es decir, $x \neq k\pi$ con $k \in Z$ (números enteros).

Por lo tanto, el dominio de *f* es:

$$Dom\ f \ = \Re \setminus \{k\ \pi\}\ con\ k\ \in\ Z$$

A continuación, se muestra la gráfica de la función *f(x)=cot (x)* en donde se puede observar que una de las asíntotas en la gráfica es el *eje y* o $x=0$



Analizando la segunda función:

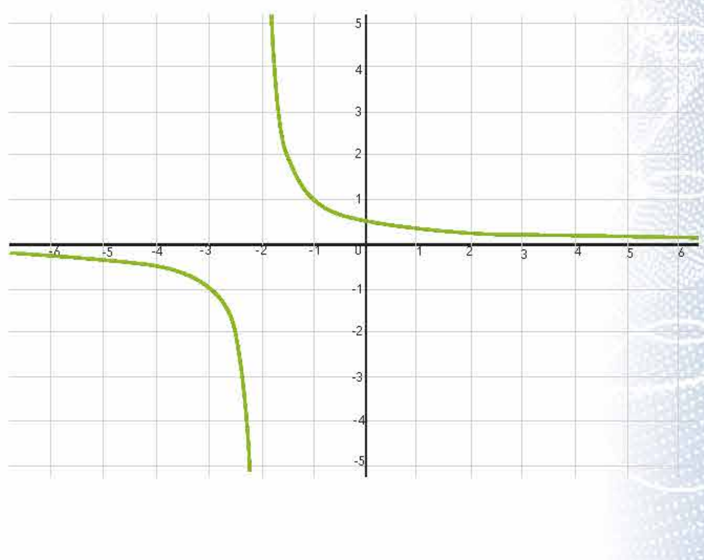
$$g(x) = \frac{1}{x+2}$$

La función es de tipo racional *y* por lo que, el dominio de la función sólo es válido en el caso que $x+2$ sea diferente de cero, y esto solo sucede cuando $x=-2$.

Por lo tanto, el dominio de *f* es:

$$Dom\ f \ = R \setminus \{-2\}$$

A continuación, se muestra la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x+2}$ donde se puede observar que la asíntota en la gráfica es la recta $x=-2$



PROMOCIÓN

Crecimiento y decrecimiento

Función creciente en un intervalo. Una función f es creciente en un conjunto $A \subset Dom\, f$ si para cualquiera de los dos puntos $x_1, x_2 \subset A$ se tiene que:

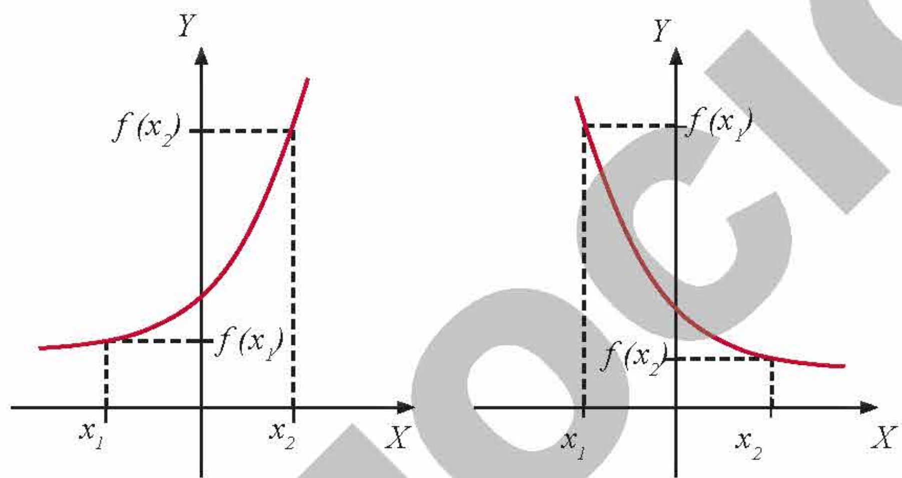
$$\text{Si } x1 < x2 \text{ implica que } f(x1) < f(x2)$$

Es decir, una función $y = f(x)$ es **creciente** en un intervalo si todos los valores del intervalo crecen.

Función decreciente en un intervalo. Una función f es decreciente en un conjunto $A \subset Dom\, f$ si para cualquiera de los dos puntos $x1, x2 \subset A$ se tiene que:

$$\text{Si } x_1 < x_2 \text{ implica que } f(x_1) > f(x_2)$$

Es decir, una función es **decreciente** en un intervalo si es decreciente para todos los valores del intervalo.



Función creciente

$x_2 > x_1 => f(x_2) \geq f(x_1)$

Función decreciente

$x_2 > x_1 => f(x_2) \leq f(x_1)$

Definimos ahora el concepto de **incremento de la variable independiente**. Si se le da a la variable independiente x un valor inicial a y después un valor final b, se llama incremento de la variable x a la diferencia $b - a$.

Notación: el incremento de x se representa Δx, es decir, la letra griega delta colocada delante de la variable x.

$$\Delta x = b - a$$

De esta última igualdad se tiene que: $b = a + \Delta x$

Signo. El incremento puede ser positivo, negativo o nulo, esto depende del valor final, sea mayor, menor o igual que el valor inicial.

El incremento de la función (**variable dependiente**). Sea ahora, una función $y = f(x)$, pero si x varía de a a b, el valor inicial de la función es $f(a)$ y el valor final $f(b)$.
La diferencia $f(b) - f(a)$ se llama análogamente incremento de la función f.

Notación: se expresa como: $\Delta f(x) = \Delta y = f(b) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$

Signo. Como en el caso de la variable independiente el incremento de una función f puede ser positivo, negativo o nulo.

Determinación del carácter creciente o decreciente de una función para $x = a$.

PROMOCIÓN

De manera simbólica se expresa de la siguiente manera.

Sea $x = a$, tenemos: Para $\Delta x > 0 \rightarrow \Delta y > 0$ Para $\Delta x < 0 \rightarrow \Delta y < 0$ La función es creciente para $x = a$.	Análogamente, partiendo de $x = a$ tenemos: Para $\Delta x > 0 \rightarrow \Delta y < 0$ Para $\Delta x < 0 \rightarrow \Delta y > 0$ La función es decreciente para $x = a$.

Ejemplo:
Determina si la función $y = x^2$ es creciente o decreciente para $x=-3$ y para $x= 3$.

Solución:
Para $x = -3$ el valor de la función es $f(a)= y = (-3)2 = 9$

Se da ahora un incremento positivo arbitrario para x: sea $\Delta x = 0.1$, el nuevo valor de:

$$b = a+\Delta x= -3 + 0.1 = -2.9$$

Y el valor correspondiente de la función en -2.9 es $f(b)=f(a+\Delta x)= (-2.9)^2 = 8.41$.

El incremento de y es: $\Delta f(b) = \Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)= 8.41 - 9 = -0.59$

Es decir que a un incremento positivo de x le corresponde uno negativo de y.

Si se diera un incremento negativo a $x = -0.1$, se vería que Δ y resultaría positivo.

La función es, por lo tanto, decreciente para $x =-3$

para $x = 3$ el valor de la función es $f(a)=y = (3)^2 = 9$

Se da ahora un incremento positivo arbitrario para x sea $\Delta x = 0.1$, el nuevo valor de:

$$b = a+\Delta x= 3 + 0.1 = 3.1$$

Y el valor correspondiente de la función en 3.1 es $f(b)=f(a+\Delta x)= (3.1)^2 = 9.61$

El incremento de y es: $\Delta f(b)=\Delta y =f(a+\Delta x)-f(a)= 9.61 - 9 = 0.61$

Por lo que un incremento positivo de x le corresponde uno positivo de y.

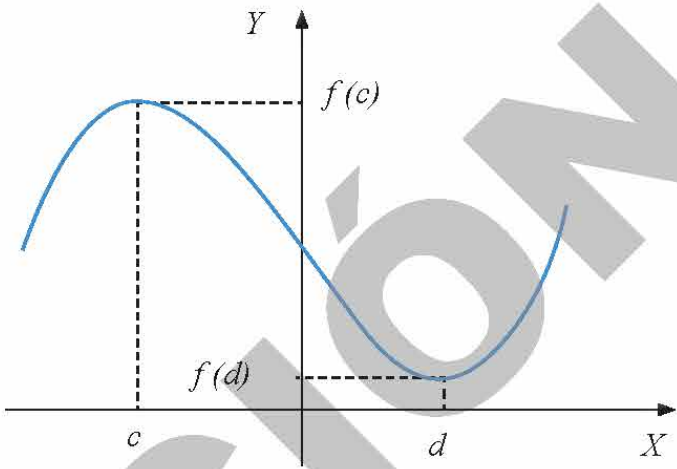
Si se diera un incremento negativo a $x = -0.1$, se vería que Δ y resultaría negativo.

La función es, por lo tanto, creciente para $x =3$.

PROMOCIÓN

Máximos y mínimos relativos

Definiciones



Sea $f : A \rightarrow R$ una función, entonces:

f tiene un máximo absoluto en $c \in A$ si

$f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in A$

El número $f(c)$ se llama el valor máximo de f en A.

Sea $f{:}A \rightarrow R$ una función, por lo que, $\in$

f tiene un mínimo absoluto en $d \in A$ si

$f(d) \leq f(x)$ para todo $x \in A$

El número $f(d)$ se llama el valor mínimo de f en A

Teorema

Si la función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza su mínimo y su máximo en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo:

Determinar si $f(x)=x \ en\ [1,5)$ tiene máximo o mínimo absoluto.

Solución:

Como $1 \leq x < 5$ entonces,

$$f(1)=1$$
$$f(x)=x$$

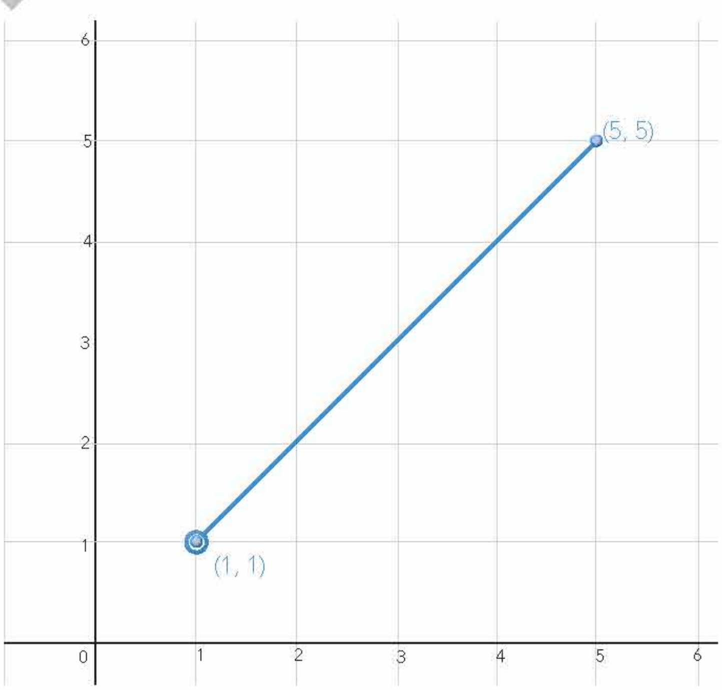
Y como $1 \leq x$, entonces:

$f(1)=1 \leq f(x)=x \quad$ para $x \in [1,5)$

Así f tiene un mínimo absoluto en 1.

Esta función no tiene máximo.

Se observa la gráfica de la función a continuación.



PROMOCIÓN

Ejemplo:

Determinar si $f(x)=x^2-1$ en $(-2,2]$ tiene máximo o mínimo absoluto.

Solución:

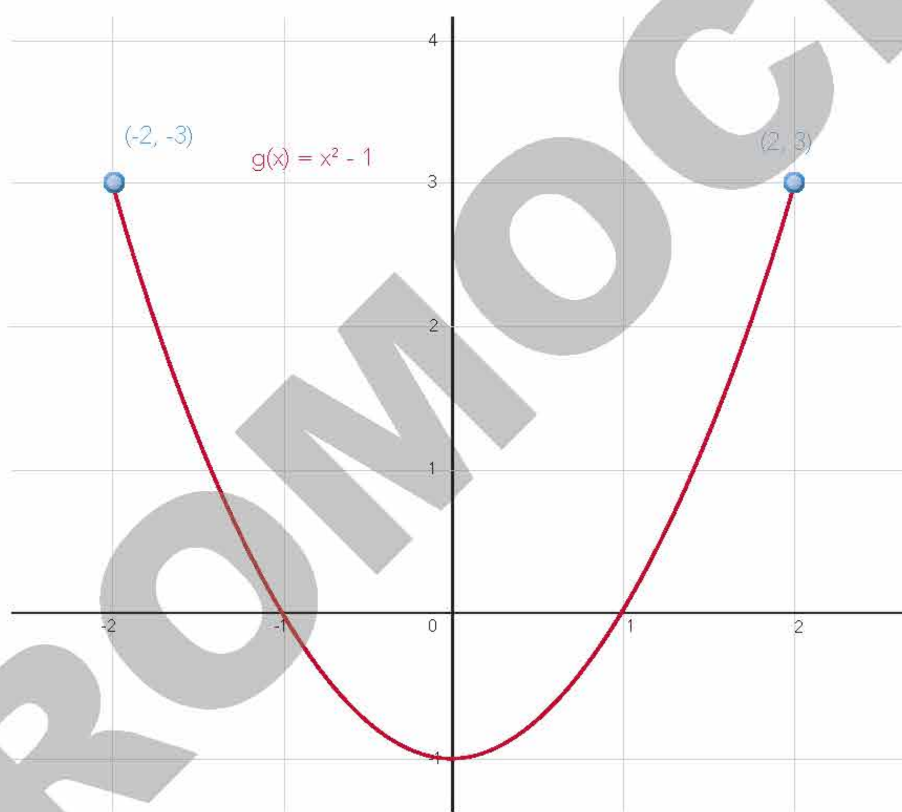
Como $-2 < x2 \leq 2$ por lo tanto,

$$f(2)=2^2-1=4\text{-}1=3$$
$$f(x)=x^2$$

Y como $x \leq 2$, entonces:

$$f(2) = 3 \geq f(x) = x2-1 \quad \text{para } x \in (-2,2]$$

Así f tiene un máximo absoluto en 2.
El mínimo absoluto lo alcanza en $x=0$ y $f(0)=0^2-1=-1$. Observa la gráfica de la función.



En esta sección hemos hablado de máximos o mínimos absolutos en las funciones, pero no podemos hablar de máximos o mínimos relativos, porque todavía no se cuenta con las herramientas necesarias ya que necesitamos calcular la primera y segunda derivada de la función y aplicar los criterios correspondientes.

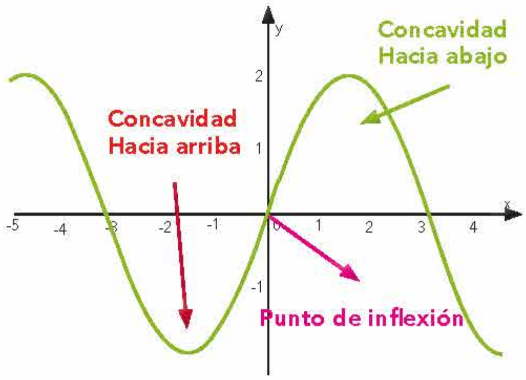
Observaciones: No deben confundirse los máximos y mínimos relativos con los puntos máximos o mínimos de una curva que son aquellos cuya ordenada es la mayor o la menor de la gráfica.

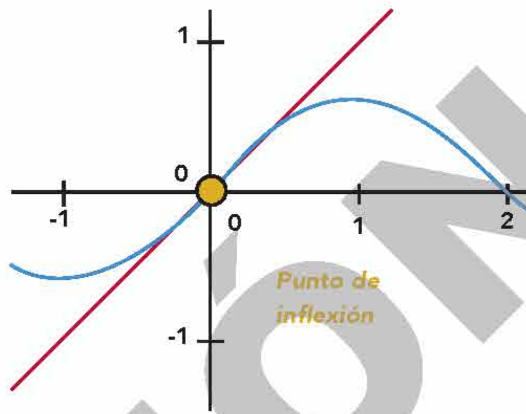
Las ordenadas de los máximos relativos pueden ser menores que las de los mínimos y que las de otros puntos de la curva. Por esto se llaman relativos.

PROMOCIÓN

Concavidades

Concavidad en un punto. Una curva en un punto puede presentar uno de los siguientes aspectos:





En la primera imagen vemos que en un entorno del punto la curva dirige su concavidad hacia arriba o hacia la parte positiva del *eje y*.
En el otro caso, en un entorno del punto la curva dirige su concavidad para abajo o hacia la parte negativa del *eje y*.

En el caso de la segunda figura, en donde la curva cambia el sentido de la concavidad en el punto. Se dice que la curva tiene un punto de inflexión, es decir, la curva cambia de concavidad hacia arriba a concavidad hacia abajo o viceversa.

Mas adelante se tratará el tema de las concavidades y de los puntos de inflexión en la gráfica de una función, porque necesitamos utilizar la primera y segunda derivada para hacer un análisis más exacto y poder calcular las concavidades y puntos de inflexión.

Elaborar 5E

Actividad de aprendizaje

Trabajo independiente: de manera individual determina si las siguientes funciones son simétricas con respecto al eje indicado en cada ejercicio.

Ejercicio 1: Determinar la simetría de las siguientes funciones:

Ejercicio	Solución
a) $x^8 - 15x^4 + 19$ ¿Es simétrica respecto al eje x?	
b) $3x - y^6 = 1$ ¿Es simétrica respecto al eje y?	
c) $x^5 - 7x$ ¿Es simétrica respecto al origen?	

PROMOCIÓN

Ejercicio 2: Determina qué tipo de funciones son par, impar o ninguna en los siguientes incisos:

Ejercicio	Solución
a) Si $f(x) = 7x^6 - 6x^4 + 13$	
b) Si $g(x) = 4x^{11} + 8x^7 - 12x^5$	
c) Si $h(x) = 11x^8 + 13x^7 - 17x^6 + 12$	

Ejercicio 3: Encuentra la discontinuidad de las siguientes funciones y dibuja las gráficas

$$f(x)=\tan(x) \quad y \quad g(x)=\frac{1}{x+1}$$

Solución:

PROMOCIÓN

Actividad de aprendizaje

En equipos de cuatro integrantes resolver los siguientes ejercicios sobre continuidad, crecimientos, decrecimientos de una función, máximos y mínimos absolutos en las funciones dadas.

Ejercicio 4:

a) Determina si la función $f(x)=x^2$ es continua en $x=8$

Solución:

PROMOCIÓN

b) Determina si la función $f(x)=x+1$ es continua en $x=3$

Solución:

c) Determina si la función $f(x)=cos(x)$ es continua en $x=\frac{3\pi}{2}$

Solución:

Ejercicio 5:

d) Determina si la función $y = x^4$ es creciente o decreciente para $x=-4$ y para $x= 4$

Solución:

PROMOCIÓN

Ejercicio 6:

e) Determinar si $f(x)=x$ en $(-5,-1]$ tiene máximo o mínimo absoluto.

Solución:

PROMOCIÓN

Ejercicio 7:

f) Determinar si $f(x)=x^2-1$ en $[-4,4)$ tiene máximo o mínimo absoluto.

Solución:

Evaluación continua y formativa

Evaluar 5E

Tabla de niveles de desempeño del estudiante

Nivel de desempeño	Valoración de los criterios	Referencia numérica
A Destacado	Cinco criterios demostrados	**10**
B Satisfactorio	Cuatro criterios demostrados	**9**
C Suficiente	Tres criterios demostrados	**8**
	Dos criterios demostrados	**7**
D Requiere apoyo	Un criterio demostrado	**6**

Lista de cotejo para los ejercicios y problemas realizados

Propósito de la progresión:

Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.

Objetivo:

Los estudiantes resuelven problemas de cálculo para hallar las rectas tangentes y normales de las funciones dadas en los puntos indicados en cada ejercicio.

Criterios de evaluación	Sí	No
a) Los estudiantes comprenden el tema de gráfica de una función, revisan simetrías, conceptos de continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos absolutos y aplican los conocimientos adquiridos al resolver los ejercicios planteados.	☐	☐
b) Los estudiantes son capaces de aplicar las definiciones antes mencionadas, para resolver los ejercicios que se les pide	☐	☐
c) Los estudiantes resuelven los problemas y logran realizar la gráfica de una función, resuelven ejercicios de simetrías, continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos absolutos, en colaboración con sus compañeros y sin ayuda del profesor.	☐	☐

PROMOCIÓN

Progresión de aprendizaje **5**

Mas rápido, más alto, más fuerte

Equipaje de mano

Metas
M1.2, M1.4, M2.1
Categorías
C1, C2, C4
Subcategorías
S1.1, S1.3, S1.4, S2.1, S2.2, S3.2

ABORDAJE
(INICIO)

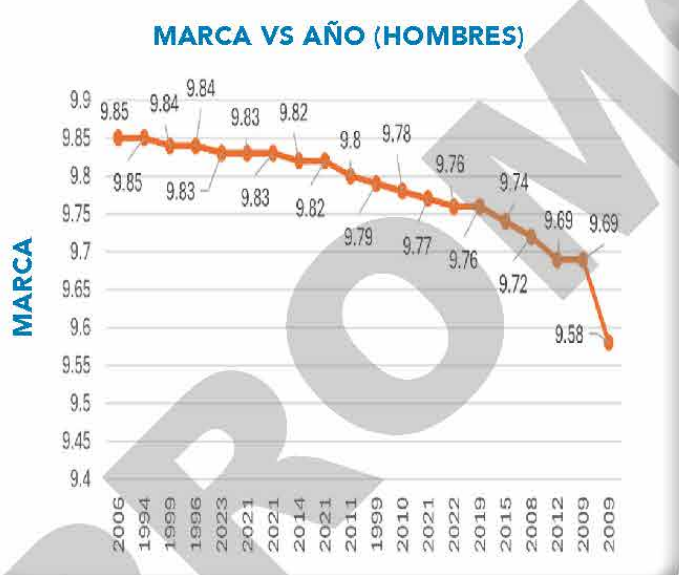
5E Enganchar

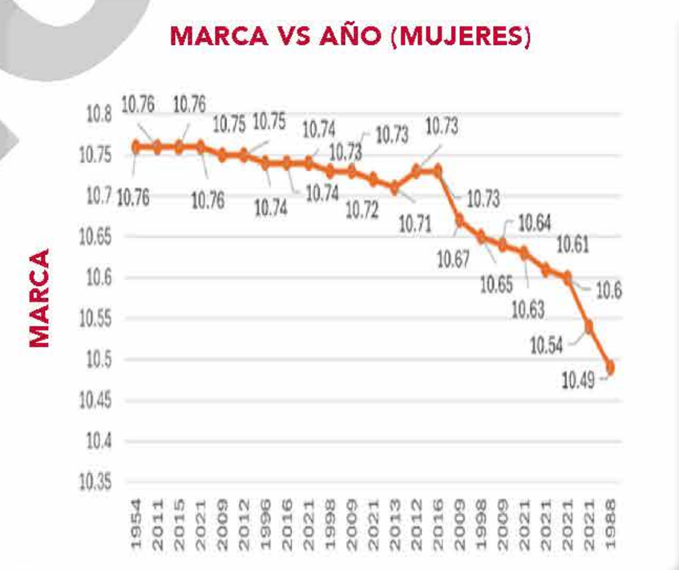
Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.

Grandeza olímpica

Analizar los marcadores más altos a nivel olímpico, y comprenderlos matemáticamente nos ayuda a comprender como ganar tiempos en *100 metros* a nivel varonil y femenil. Ejemplo. Los *9.85 segundos* de **Leroy Burrel (1994)** y los solo *9.58 segundos* de **Usain Bolt (2009)**.

En las siguientes graficas se muestran los récords olímpicos en 100 metros de las mejores marcas de los 20 hombres más rápidos de la Tierra y en el segundo grafico se desarrolla la gráfica de las 15 mujeres más rápidas del planeta en 100 metros.





La gráfica muestra marca vs tiempo, es decir, comienza con los tiempos más altos registrados, y conforme avanza sobre el eje x, el tiempo disminuye, pero si observas la gráfica, hay un pequeño patrón del lado izquierdo de la gráfica, en la cual se mantiene casi constante. En el caso de los hombres el récord más alto se mantiene entre 9.82 s a 9.85 s., y el tiempo más bajo sobre 9.58 s.

Si sabes de quien es ese récord, escríbelo aquí:

Por otra parte, en el caso de las mujeres, en el extremo izquierdo de la gráfica la marca más alta se mantiene entre 10.73 s a 10.76 s y el tiempo más bajo en 10.49 s.

Si se realiza un acercamiento más detallado te darás cuenta que estos tiempos se aproximan a un intervalo de tiempo, y que la curva de la gráfica se aproxima asintóticamente a un límite o número, acercándose cada vez más, sin poder alcanzarla, a semejanza de cuando dos imanes se aproximan sin poder unirse. Pero, ¿qué tan próximos? ¿Qué permite que ocurra esto en el deporte?

Para que los deportistas de alto rendimiento puedan romper récord o bajar tiempos, alcanzar más distancias o alturas, se trabaja arduamente con todo un equipo de entrenamiento, en colaboración con psicólogos, médicos deportivos y fisiólogos que se enfocan en la parte mental para dar el máximo en cada competencia, además de utilizar la tecnologías más avanzadas para entrenar y monitorear el rendimiento físico, pero por otra parte también se unen a especialistas en diseño deportivo para crear accesorios que copien la naturaleza de diversas especies.

Ejemplos claros son los trajes de baño fabricados con la textura y forma de la piel de los tiburones para tener una menor resistencia en el agua, o los trajes aerodinámicos de los ciclistas para una menor resistencia con el aire al momento de alcanzar velocidades más altas.

Actividad de aprendizaje

A. En equipos de cinco integrantes, relean la lectura y respondan.

1. ¿Quiénes mantiene el récord más bajo en los 100 m planos en hombres y mujeres, y a qué país pertenecen?

2. ¿Quiénes tiene la marca más alta en 100 m planos en hombres y mujeres y a qué país pertenecen?

3. ¿Qué significa que la gráfica tiende asintóticamente a un número?

PROMOCI

Actividad de aprendizaje

Trabajo independiente: Investiga las 20 mejores marcas en 100 metros planos en hombre y las 15 mejores en mujeres. Realiza una tabla donde coloques su posición, marca, atleta, país y fecha en que consiguió imponer la marca.

PROMOCIÓN

Investiga y escribe en el recuadro qué tipo de tecnología deportiva se ha creado (ropa, calzado, herramientas, equipo, etcétera) para que los atletas lo utilicen en competencias mundiales u olímpicas para incrementar su rendimiento y romper récords mundiales u olímpicos.

PROMOCIÓN

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

Límite de una función de variable real

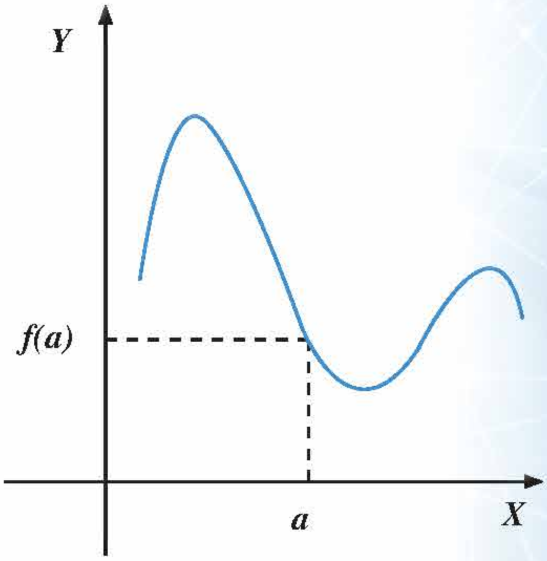
Explicar

Si f es una función se dice que:
L es límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a
si el valor de $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L cuando x se aproxima a a.

En notación matemática expresa así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

"Decimos que el número L es el límite de la función $f(x)$ en el punto a si cuando tomamos valores de $x \neq a$ muy cercanos a a los valores de $f(x)$ se acercan a L tanto como queramos".



En la figura de la derecha se muestra el concepto de límite de manera grafica.

Ejemplo: Hagamos el análisis de la siguiente función $f(x)=x2+5$ y analicemos

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 5$$

Construiremos una tabla de valores *f(x)* usando distintos valores de x, muy cercanos a $a=1$.

En la tabla consideramos valores de x que tienden por la izquierda (valores de x menores que 1), así como valores de x que tienden por la derecha (valores de x mayores que 1). Es decir, se evalúa por la izquierda y por la derecha valores de x menores y mayores a 1, respectivamente como sigue:

Por la izquierda

$$\boldsymbol{f(0.9) = (0.9)^2 + 5 = 0.81 + 5 = 5.81}$$

Por la derecha

$$\boldsymbol{f(1.1) = (1.1)^2 + 5 = 1.21 + 5 = 6.21}$$

Y así sucesivamente como se muestra en la siguiente tabla:

Comportamiento de $f(x)= x^2+5$ cuando $x\to 1$			
x <1	f(x)	x>1	f(x)
0.9	5.81000	1.1	6.21
0.99	5.98010	1.01	6.0201
0.999	5.99800	1.001	6.002001
0.9999	5.99980	1.0001	6.00020001
0.99999	5.99998	1.00001	6.00002
⋮ ↓ 1	⋮ ↓ 6	⋮ ↓ 1	⋮ ↓ *6*

Aun cuando hemos tomado solo unos valores particulares por la izquierda y por la derecha, esto nos da indicio de que:

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 5 = 6$$

Corroboramos que conforme los valores de "x" se aproximan a un número fijo (en este caso 1), sea por el lado izquierdo o por el derecho, la función *f(x)* se aproxima por su parte a otro número fijo (en este caso 6).

En consecuencia, el límite es 6.

Cabe mencionar que no hemos sustituido el valor de $x=1$ en la función $f(x)=x^2+5$ para obtener el valor 6 del límite.

Algunas veces esta sustitución nos da la respuesta correcta (como en este caso en particular), aunque en muchos límites nos genera una respuesta incorrecta. Por lo tanto, calcular un límite no simplemente es sustituir el valor de "a" en $f(x)$.

¿SABÍAS QUÉ...

El matemático Weierstrass formuló la definición más rigurosa del concepto de límite, que actualmente se utiliza, y dice:

La función f tiende hacia el límite L cuando x tiende a a si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x,

si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

PROMOCIÓN

Limites laterales

Los límites laterales de *f(x)* es cuando *x* se aproxima a *a* por el lado derecho o por el izquierdo.

Por $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ se entiende que está definida en algún intervalo abierto *(c,a)* y *f(x)* se aproxima a *L* cuando *x* se acerca a a por valores menores que *a*, es decir, cuando *x* tiende hacia a por la izquierda.

De igual forma $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ significa que *f* está definida en algún intervalo abierto *(a,d)* y *f(x)* se aproxima a *L* cuando *x* se acerca a *a* por valores mayores que *a*, es decir, cuando *x* tiende hacia a por la derecha.

Si *f* está definida en el intervalo a la izquierda de *a* y en un intervalo a la derecha de *a*, la afirmación $\lim_{x\to a} f(x) = L$ equivale a la conjunción de las dos afirmaciones $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

Veamos algunos ejemplos, donde la existencia del límite por la izquierda no implica la existencia del límite por la derecha y viceversa.

Cuando una función está definida sólo en un lado de un punto *a*, $\lim_{x\to a} f(x) = L$ es idéntico al límite lateral.

Ejemplo 1: La función $f(x)=\sqrt{x}$ y su Dom $f=\{x|x\geq 0\}$.
Calcula los limites laterales cuando $x\to 0$.

Solución:

$f(x)=\sqrt{x}$. Es decir, está definida sólo a la derecha de cero, porqué el dominio de la función es $x\geq 0$. Por lo tanto, como $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ o escribirlo como $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, es decir, ya sin la notación de limite lateral.

Claro que $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} = 0$ no existe ya que $\sqrt{x}$ no está definida cuando $x<0$.

Ejemplo 2: La función $f(x)=\sqrt{(9-x^2)}$ y su Dom $f=\{x|-3\leq x\leq 3\}$.
Calcula los limites laterales cuando $x\to 3$

Solución:

$$\lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(-3)^2} = \sqrt{9-9} = 0$$
$$\lim_{x\to 3^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3)^2} = \sqrt{9-9} = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = \lim_{x\to 3} \sqrt{9-x^2=0} \ \ y\ de\ igual\ forma\ \ \lim_{x\to 3^+} \sqrt{9-x^2} = \lim_{x\to 3} \sqrt{9-x^2=0}$$

PROMOCIÓN

Teoremas sobre limites

Los teoremas siguientes son intuitivamente claros.

Sean f y g dos funciones definidas en los reales, a y $k \in R$ entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \;\; y \;\; \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

- Límite de una constante

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k$$

- Límite de una suma o diferencia

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$$

- Límite de un producto

$$\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \times L_2$$

- Límite de un cociente

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = \frac{1}{L_2} \;\; si\; L_2 \neq 0$$

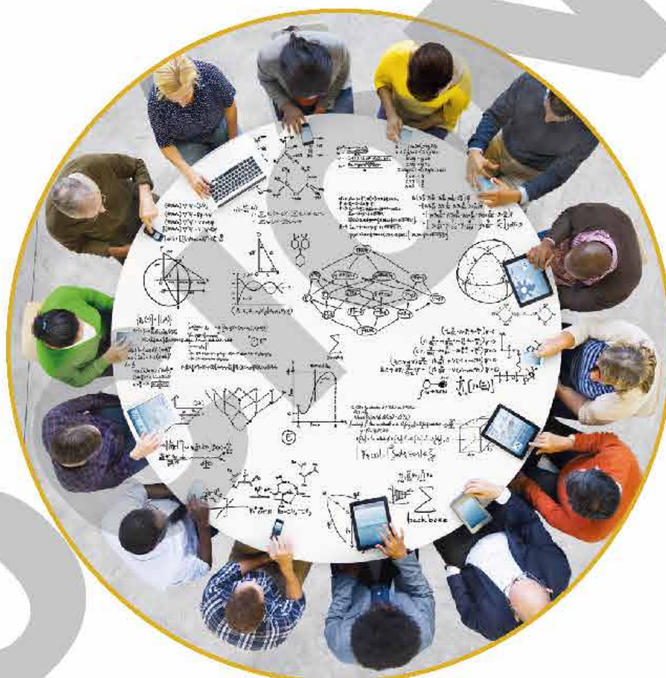
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \;\; si\; g(x) y\; L_2 \neq 0$$

- Límite de una potencia

$$\lim_{x-a}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = a^n$$

- Límite de una raíz

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a}$$



Ejemplo 1: Calcular $\lim_{x\to 2} 3x^3 + 5x^2$

Solución:

$$\lim_{x\to 2} 3x^3 + 5x^2 = \lim_{x\to 2} 3x^3 + \lim_{x\to 2} 5x^2 = 3\lim_{x\to 2} x^3 + 5\lim_{x\to 2} x^2$$
$$= 3(2)^3 + 5(2)^2 = 3(8) + 5(4) = 24 + 20 = 44$$
$$\lim_{x\to 2} 3x^3 + 5x^2 = 44$$

Ejemplo 2: Calcular $\lim_{x\to -2}(x+4)(2x^2-2)$

Solución:

$$\lim_{x\to -2}(x+4)(2x^2-2) = \left[\lim_{x\to -2}(x+4)\right]\left[\lim_{x\to -2}(2x^2-2)\right] = \left[\lim_{x\to -2} x + \lim_{x\to -2} 4\right]\left[\lim_{x\to -2} 2x^2 - \lim_{x\to -2}(2)\right]$$
$$[-2+4][2(-2)^2-(2)] = (2)(6) = 12$$
$$\lim_{x\to -2}(x+4)(2x^2-2) = 12$$

PROMOCIÓN

Ejemplo 3: Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-3}{x^3-7}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3}{x^3-7}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^2-3}{\lim\limits_{x\to 0}x^3-7}=\frac{\lim\limits_{x\to \infty}x^2-\lim\limits_{x\to 0}3}{\lim\limits_{x\to 0}x^3-\lim\limits_{x\to 0}7}=\frac{0^2-3}{0^3-7}=\frac{-3}{-7}=\frac{3}{7}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3}{x^3-7}=\frac{3}{7}$$

Ejemplo 4: Calcular $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt[3]{x+2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 6}\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{6+2}=\sqrt[3]{8}=2$$
$$\lim_{x\to 6}\sqrt[3]{x+2}=2$$

Límites indeterminados

Consideremos la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}}$$

Podemos observar que resulta imposible conocer el valor de la función en $x=4$, es decir, conocer el valor $f(4)$.

Consideremos que si calculamos los límites cuando $x\to 4$ tanto para el numerador como para el denominador nos encontramos que ambos valen cero, es decir, tenemos una indeterminación del tipo $0/0$.

Es importante mencionar que el hecho de que el límite del denominador se anule nos impide utilizar la propiedad del cociente para límites.

Y si calculamos el límite realizando una tabulación cercanos a $x=4$, nos da una aproximación del valor del límite

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-16}{x-4}=6$$

En esta sección vamos a utilizar herramienta algebraica para quitar la indeterminación $0/0$ de este tipo de límites.

Teorema: si f y g son dos funciones tales que $f(x)$ y $g(x)$ para todo $x=a$ y el

$$\lim_{x\to a} g(x)=L$$

Entonces:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$$

PROMOCIÓN

Ejemplo 1: Calcular $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$

Solución:

Factorizamos el numerador, al observar que se puede ver como un binomio conjugado

$$\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=x+4\ \ si\ x\neq 4$$

Como:

$$\lim_{x\to 4}(x+4)=4+4=8$$

Entonces, por el teorema anterior

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=8$$

Ejemplo 2 : Calcular $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$

Solución:

Factorizando en el numerador y denominador

$$\frac{x^3-27}{x^2-9}=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x^2+3x+9}{x+3}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}=\frac{(3)^2+3(3)+9}{3+3}=\frac{9+9+9}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

Entonces, por el teorema

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\frac{9}{2}$$

Multiplicando y dividiendo por el conjugado

Al tener un cociente de dos funciones que tienen valor de cero en a, pero que en alguna de ellas aparece un radical, para eliminarlo, multiplicamos y dividimos por el conjugado del que lo contiene.

Ejemplo 3 : Calcular $\lim\limits_{x\to 36}\frac{30(\sqrt{x}-6)}{x-36}$

Solución:

$$\frac{30(\sqrt{x}-6)}{x-36}=\left(\frac{30(\sqrt{x}-6)}{x-36}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+6}\right)=\frac{30(x-36)}{(x-36x)(\sqrt{x}+6)}=\frac{30}{\sqrt{x}+6}\Rightarrow si\ x\neq 36$$

$$\lim_{x\to 36}\frac{30}{\sqrt{x}+6}=\frac{30}{\sqrt{36}+6}=\frac{30}{6+6}=\frac{30}{12}=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to 36}\frac{30(\sqrt{x}-6)}{x-36}=\frac{5}{2}$$

PROMOCIÓN

Límites al infinito

$$\textbf{Si } H(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

Los resultados de los límites para las formas, $\lim_{x\to a} H(x), \lim_{x\to\infty} H(x), \lim_{x\to-\infty} H(x)$

Si se obtiene una expresión de la forma L/∞ , el límite es $\boldsymbol{0}$.

Si se obtiene una expresión de la forma ∞/L, el límite es infinito.

Si se obtiene una expresión de la forma $L/0$, el límite es infinito.

Siendo $L \in \mathbb{R}$ y $L \neq 0$.

Teorema:

$$\textbf{Si } \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_m}, \text{ entonces}$$

- Sí $n > m$, es decir, si el polinomio del numerador es de mayor grado que el del denominador, el límite es infinito.
- Sí $n < m$, es decir, si el polinomio del numerador es de menor grado que el del denominador, el límite es cero.
- Sí $n = m$, es decir, si ambos polinomios son del mismo grado, entonces el limite es $\frac{a_0}{b_0}$.

Ejemplo 1: Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ejemplo 2: Calcular $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Ejemplo 3: Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3-7x^2-5x+3}{6x^3-4x+6}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3-7x^2-5x+3}{6x^3-4x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(8-\frac{7x^2}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(6-\frac{4x}{x^3}+\frac{6}{x^3}\right)} = \frac{8-\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{6-\frac{4}{x^2}+\frac{6}{x^3}} = \frac{8-0-0+0}{6-0+0} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3-7x^2-5x+3}{6x^3-4x+6} = \frac{4}{3}$$

PROMOCIÓN

Ejemplo 4: Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-2x+6}{3x^3+5x-2}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-2x+6}{3x^3+5x-2}=\lim_{x\to 0}=\frac{x^3\left(\frac{7x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{6}{x^3}\right)}{x^3\left(3+\frac{5x}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{3+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{0-0+0}{3+0-0}=\frac{0}{3}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-2x+6}{3x^3+5x-2}=0$$

Ejemplo 5: Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2}{x^2+5x}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2}{x^2+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{2x^2}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}\right)}=\frac{3+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{3+0}{0+0}=\frac{3}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2}{x^2+5x}=\infty$$

Actividad de aprendizaje

Trabajo independiente: Analiza de manera numérica los siguientes límites y construye la tabla de valores, tal como se ha hecho en este libro.

Ejercicio 1: $\lim\limits_{x\to 1} -3x+5$

Comportamiento de $f(x)=-3x+5$ cuando $x\to 1$			
x<1	f(x)	x>1	f(x)

PROMOCIÓN

Ejercicio 2: $\lim_{x \to 3} 3x^2 + x$

Comportamiento de *f(x)= 3x²+x* cuando *x→3*			
x < 3	f(x)	x >3	f(x)

Ejercicio 3: $\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x-2}$

Comportamiento de *f(x)= x+3/x-2* cuando *x→1*			
x < 3	f(x)	x >3	f(x)

PROMOCIÓN

2. Analiza los siguientes límites laterales

Ejercicio 4:
La función $f(x)=\sqrt{(16-x^2)}$ y su $Dom\ f=\{x|-4\leq x\leq 4\}$.
Calcula los limites laterales cuando $x\to 4$

Ejercicio 5:
La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ y su Dom $f=\{x|\ x>0\}$. Calcula los limites laterales cuando $x\to 0$

Ejercicio 6:
La función $f(x) = \frac{3x}{|3x|}$ y su Dom $f=\{x|-3\leq x\leq 3\}$. Calcula los limites laterales cuando $x\to 0$

PROMOCIÓN

3. Actividad de aprendizaje: en equipos de cuatro integrantes resuelvan los siguientes limites:

Ejercicio 7:

Calcular $\lim_{x\to 3} 8x^3 + 3x^2$

Ejercicio 8:

Calcular $\lim_{x\to -2} (x+5)(4x^2-4)$

Ejercicio 9:

Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-9}{x^3-8}$

PROMOCIÓN

Ejercicio 10:

Calcular $\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{x^2 + 2}$

Ejercicio 11:

Calcular $\lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8}$

Ejercicio 12:

Calcular $\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 16}$

PROMOCIÓN

Ejercicio 13:

Calcular $\lim\limits_{x \to 25} \frac{20(\sqrt{x}-5)}{x-25}$

Ejercicio 14:

Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-15x^3-12x^2-7x+5}{-3x^3-6x+8}$

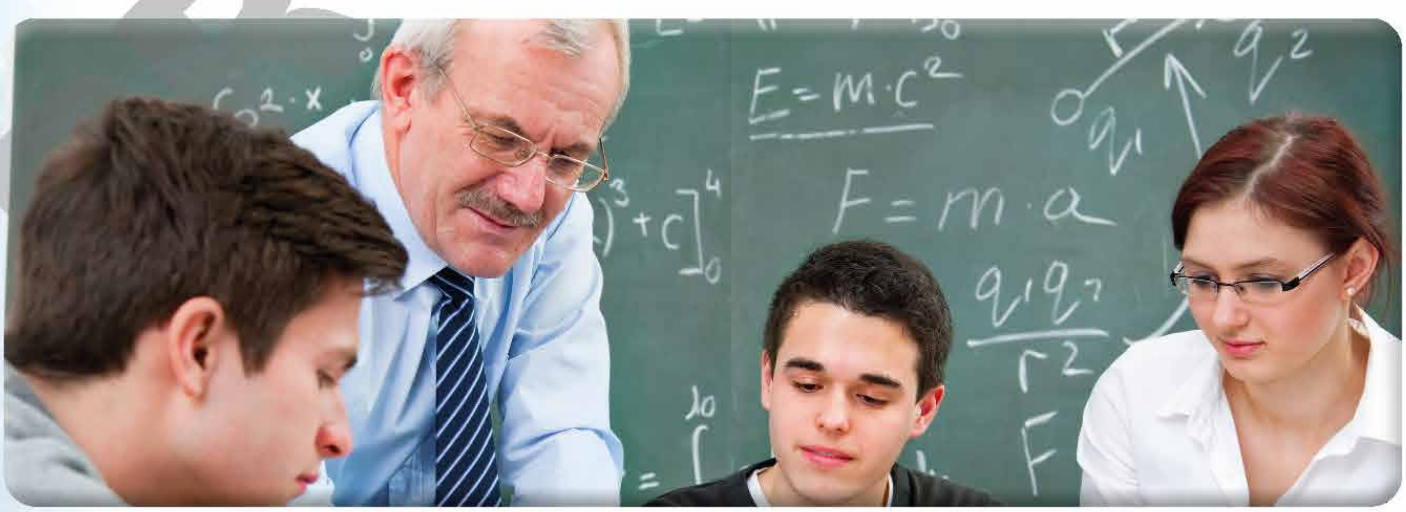
PROMOCIÓN

Ejercicio 15:

Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 7x + 6}{5x^3 + 3x - 4}$

Ejercicio 16:

Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 + 7x^2}{7x^2 + 9x}$



PROMOCIÓN

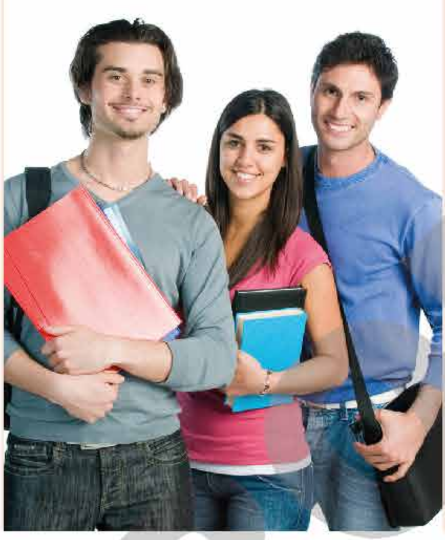
Evaluar 5E

Evaluación continua y formativa

Tabla de niveles de desempeño del estudiante

Nivel de desempeño	Valoración de los criterios	Referencia numérica
A Destacado	Cinco criterios demostrados	10
B Satisfactorio	Cuatro criterios demostrados	9
C Suficiente	Tres criterios demostrados	8
	Dos criterios demostrados	7
D Requiere apoyo	Un criterio demostrado	6

Lista de cotejo para los ejercicios y problemas realizados



Propósito de la progresión:

Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.

Objetivo:

Los estudiantes resuelven problemas sobre límites de una variable real y hacen aproximaciones haciendo tabulación, pero también aplicando teoremas sobre límites de una suma, producto, cociente, potencias y raíces, así como límites indeterminados y cuando el límite tiende a infinito.

Criterios de evaluación	Sí	No
a) Los estudiantes comprenden el tema de límite y aplican los conocimientos adquiridos al resolver los ejercicios planteados.	☐	☐
b) Los estudiantes son capaces de aplicar las definiciones de límite, para resolver los ejercicios que se les pide	☐	☐
c) Los estudiantes resuelven los problemas y encuentran el límite de la función en el punto dado o cuando el límite tiende a infinito, en colaboración con sus compañeros y sin ayuda del profesor.	☐	☐
d) Los estudiantes trabajan en equipo para realizar correctamente el trabajo que se les pide.	☐	☐
e) Los estudiantes llegan al resultado correcto.	☐	☐

PROMOCIÓN

Unidad 1

Evaluación

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas, utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad y escribe el procedimiento completo para llegar al resultado correcto.

1. Un corredor da una vuelta por una pista de 400 m en un tiempo de 40 s. ¿Cuáles son a) la rapidez promedio y b) la velocidad promedio del corredor? (1 PUNTO)

2. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes y normal de la siguiente función en el punto indicado. (2 PUNTOS)

$$\mathbf{1}.\, f(x) = x^2 + 1 \; en \; a = 5$$

PROMOCIÓN

3. Considere la función $\boldsymbol{f(x) = 4x} \quad \boldsymbol{si\ x \in [-1, 6]}$

Encontrar las imágenes correspondientes a los valores x=$-1, 0, 2, 4, 5,$ y después hacer la tabla de valores, por último graficar la función. (3 PUNTOS)

4. Si $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{x^2-81}}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x+9}}$, encontrar f+g y fg y también el dominio de las operaciones indicadas. (4 PUNTOS)

PROMOCIÓN

5. Si $= x^3$ y $g(x) = x + 5$, encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$ y el dominio de las composiciones. (3 PUNTOS)

6. Determinar la simetría de la siguiente función

$x^{12} - 13x^8 + 17$ ¿es simétrica respecto al eje x? (1 PUNTO)

7. Determina si la función es, impar o ninguna. (1 PUNTO)

Si $h(x) = 17x^6 + 15x^5 - 13x^4 + 11$

PROMOCIÓN

8. Encuentra la discontinuidad de la siguiente función y dibuja la gráfica $g(x) = \frac{1}{x+2}$

9. Determina si la función $f(x)=x^2-11$ es continua en $x=9$

10. Determina si la función $y = x^4$ es creciente o decreciente para $x=-3$ y para $x= 3$. (2 PUNTOS)

PROMOCIÓN

11. Determinar si $f(x) = x^2 - 2$ en $[-5, 5)$ tiene máximo o mínimo absoluto. (2 PUNTOS)

12. Calcular $\lim_{x \to -2} [(x + 10)(5x^2 - 5)]$ (1 PUNTO)

13. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 18}{x^3 + 17}$ (1 PUNTO)

14. Calcular $\lim_{x \to 12} \frac{x^2 - 144}{x - 12}$ (1 PUNTO)

14. Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{-19x^3 - 10x^2 - 8x + 3}{-13x^3 - 12x + 9}$ (1 PUNTO)

PROMOCIÓN

Evaluación Integradora de la unidad 1

Actividad en equipos de 4 integrantes

Proyecto: Índice de Masa Corporal (IMC)

1. Objetivo del Proyecto

A partir de las progresiones aprendidas en esta Unidad 1 se emplearán los conceptos más relevantes aprendidos para realizar una investigación de campo, con el objetivo de analizar el índice de masa corporal de los grupos de tercer semestre, para mostrar de manera respetuosa, problemas de desnutrición u obesidad que existan en el colegio.

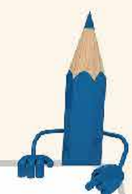
Utiliza tus conocimientos en calculo diferencial de manera crítica y reflexiva para la solución de problemas. Comprende y analiza conceptos del tema como: Modelo matemático, funciones, limites, grafica de funciones, funciones crecientes, decrecientes, máximos y mínimos absolutos, aplicables a la vida real.

Debes realizarlo a partir de las siguientes etapas y características:

- Trabajo de investigación en Word con:
  - **Carátula** (nombre de la escuela, profesor, materia, integrantes del equipo, nombre del proyecto, grado y grupo, fecha de entrega)

- Objetivo (el que se menciona arriba, copiarlo tal cual en su trabajo)

2. Introducción (contestar las siguientes preguntas)



a) ¿Qué es el índice de masa corporal (IMC)?

b) ¿Cómo se usa el IMC?

PROMOCIÓN

c) ¿Por qué se usa el IMC para medir el sobrepeso y la obesidad?

d) ¿Cuáles son otras formas de evaluar el exceso de grasa corporal además del IMC?

e) ¿Como se calcula el IMC?

f) ¿Como se interpreta el IMC?

PROMOCIÓN

g) ¿Qué tan bueno es el IMC como indicador de grasa corporal?

h) ¿Cuáles son las consecuencias del sobrepeso u obesidad en los adultos?

i) ¿El IMC se interpreta de la misma manera para los niños, adolescentes que para los adultos?

3. Desarrollo

Instrucciones:

- Llevar una báscula y medir el peso de los estudiantes de 5° semestre de tu preparatoria. Separar hombres y mujeres. Realiza dos tablas en Excel.
- Llevar una cinta métrica o flexómetro de preferencia y medir la estatura de los estudiantes de 5°semestre, hombres y mujeres por separado y hacer dos tablas en Excel.
- Calcula el IMC de los datos obtenidos de ambos con Excel.
- Grafica los datos obtenidos, en este caso serán dos gráficas de IMC vs masa y de IMC vs estatura.
- Analiza las gráficas y busca si hay un límite al cual tiende el IMC en hombre y en mujeres.
- Responde si hubo un máximo y mínimo determinado local en cada grafica.
- ¿Cuál es el modelo matemático que resuelve el problema del IMC?

- Menciona cuántos estudiantes tienen problema de desnutrición, sobrepeso u obesidad y plantea una solución para resolver esta problemática.

4. Análisis (dos partes)

- Crea un video sobre el IMC con una duración máxima de tres minutos donde se explique brevemente como realizaron la investigación y midieron el IMC. Explica y calcula a través de los conceptos aprendidos en esta unidad. El video debe ser en formato mp4 y subirse a YouTube. Recuerden entregar su reporte impreso.

- Requisitos del video: Deben de salir cada uno de los participantes en el video, presentarse diciendo su nombre, grado, grupo, turno, nombre del profesor, materia y nombre del proyecto.

- Explicar brevemente que materiales utilizaron y como midieron el IMC de los estudiantes de su preparatoria.

- Explicar el modelo matemático utilizado para obtener el IMC a través de los conceptos de cálculo diferencial.

PROMOCIÓN

5. Conclusiones (contestar las siguientes preguntas)

a) ¿Pudieron calcular el IMC correctamente? Argumenta tu respuesta, explica brevemente cómo funciona usando los conceptos aprendidos en esta unidad 1 de la materia.

b) ¿En qué otros lugares pueden aplicarse esta investigación? ¿Realmente ayuda a resolver determinados problemas?

c) ¿Cuál es la aportación que estás haciendo al medir el IMC en tus compañeros y si tiene algo que ver con su alimentación?

d) ¿Cuál es la experiencia y /o aprendizaje que has adquirido al realizar este proyecto? Explica y argumenta de manera breve.

6. Fuentes de información (bibliográfica y cibergráfica.

PROMOCIÓN

Matrices para evaluar las progresiones a desarrollar. (De acuerdo con los instrumentos y/o estrategias que se utilizarán para evaluar progresiones y contenido central).

Rúbrica para evaluar CALCULANDO EL INDICE DE MASA CORPORAL (IMC)					
	Niveles de Desempeño				
Categoría (Indicadores)	Muy bueno (10)	Bueno (9)	Suficiente (8)	Insuficiente (7)	Puntuación obtenida
Conocimiento Científico	Las explicaciones de los estudiantes indican un claro y preciso entendimiento de los conceptos, principios y modelos matemáticos, teoremas, formulas, gráficas y demás temas.	Las explicaciones de los estudiantes indican un entendimiento de los conceptos, principios y modelos matemáticos, teoremas, formulas, gráficas y demás temas.	Las explicaciones de los estudiantes indican un entendimiento poco preciso de los conceptos, principios y modelos matemáticos, teoremas, formulas, gráficas y demás temas.	Las explicaciones de los estudiantes no ilustran mucho entendimiento de los conceptos, principios y modelos matemáticos, teoremas, formulas, gráficas y demás temas.	
Bitácora (reporte escrito)	El reporte cumple con todos los requerimientos científicos establecidos por el docente	El reporte cumple en términos generales con los requerimientos científicos establecidos por el docente	El reporte menciona algunos requerimientos científicos establecidos por el docente	El reporte no cumple con los requerimientos establecidos por el docente.	
Construcción-Materiales-Cuidados	Los materiales apropiados fueron seleccionados y creativamente modificados en formas que los hacen mucho mejor. Gran cuidado se tomó en el proceso de medir el peso y la estatura y que los datos fueran ordenados, atractivos y siguiera los planes con precisión.	Los materiales apropiados fueron seleccionados y hubo un intento de modificación creativa para mejorarlos. La medición del peso y estatura fue cuidadosa y precisa en la mayor parte, pero 1-2 detalles podrán haber sido refinados para obtener un producto más atractivo.	Los materiales apropiados fueron seleccionados y hubo muy poca modificación creativa para mejorar. La medición del peso y estatura sigue unos planes precisos, pero 3-4 detalles podrán haber sido refinados para obtener un producto más atractivo.	Los materiales apropiados no fueron seleccionados y contribuyeron a que el rendimiento del producto fuera pobre. La medición del peso y estatura parece descuidada o es fortuita. Muchos detalles necesitan refinamiento para obtener un producto fuerte o atractivo.	
Video	La explicación de su proyecto de IMC fue extraordinariamente bien, está perfectamente ensamblada y la realización de este cumple con todos los requisitos.	La explicación de su proyecto de IMC fue buena, no está perfectamente ensamblada y la realización de este cumple con casi todos los requisitos.	La explicación de su proyecto de IMC fue regular, pero no ensambla bien y la realización de este no cumple con todos los requisitos.	Defectos fatales en la explicación de su proyecto de IMC fue con un fallo completo y la realización de este no cumple con ningún requisito pedido.	
				Total:	

PROMOCION