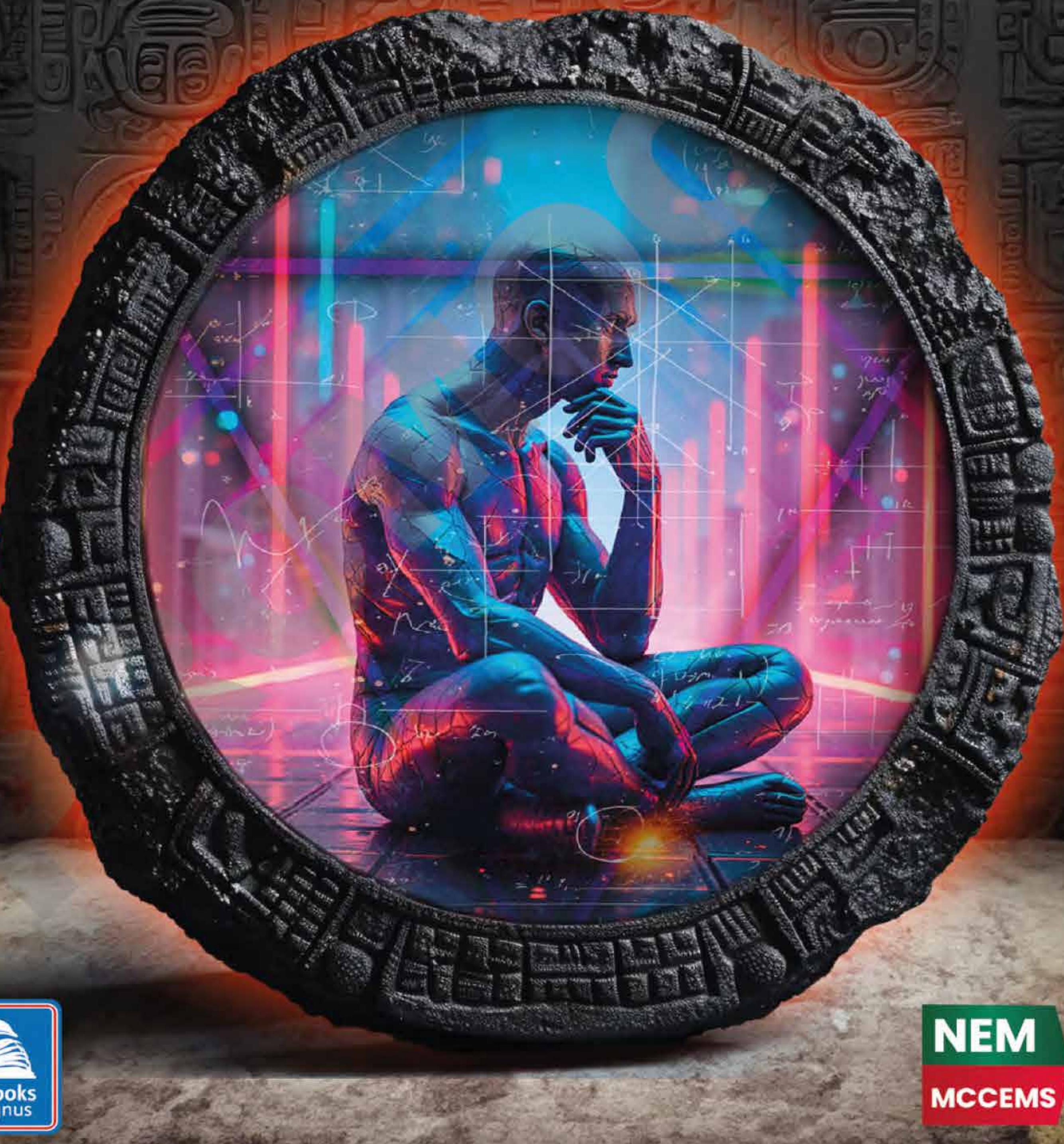
EXPEDICIÓN

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

Arturo Ruelas Villareal &
Juan Carlos Velázquez Hernández



BlueBooks & Magnus

NEM
MCCEMS

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

Dirección Editorial: **BB&M Academic**

Diseño Gráfico: **Rosario Jiménez**

Diseño de Portada: **Rosario Jiménez**

Maquetación: **Karen González**

Revisión Técnica: **Daniela Rodríguez**

Dirección de Producción: **Ricardo Cruz Flores**

Autores: **Arturo Ruelas Villareal**

Juan Carlos Velázquez

Derechos de autor: **Bluebooks and Magnus S.A. de C.V.**

Edición: **Ileana Oropeza Rosas**

Imágenes: **Dreamstime**

ISBN: **En trámite**

55 4957 0102

contacto@bluebooksandmagnus.com

www.bluebooksandmagnus.com

ventas@bluebooks.com.mx

1a Edición

Impreso en México / Printed in México

Se terminó la impresión de esta obra en 2025

En los talleres de Fortaleza Gráfica S.A. de C.V. Amado Nervo Mza. 11 Lte. 43 Col. Palmitas Alcaldía Iztapalapa. C.P. 09670 Ciudad de México.

Contenido/ Progresiones

Introducción
PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

Vivimos en un mundo en constante transformación. El Sol se eleva cada día siguiendo trayectorias milenarias, el corazón humano late con un ritmo ajustado a la vida, y los teléfonos inteligentes responden en milisegundos a nuestros gestos. Todos estos fenómenos, tan distintos entre sí, tienen algo en común: cambian con el tiempo, y para comprenderlos necesitamos una herramienta capaz de analizar ese cambio. Esa herramienta es el cálculo diferencial.

Este libro ha sido cuidadosamente diseñado para acompañarte en una travesía intelectual profunda y significativa por los fundamentos del cálculo. Aquí no memorizarás fórmulas sin sentido ni resolverás problemas aislados. Por el contrario, explorarás ideas poderosas que han cambiado la historia de la humanidad, entenderás cómo modelar fenómenos reales y adquirirás habilidades para razonar científicamente y tomar decisiones informadas.

¿Qué vas a encontrar en estas páginas? El libro se estructura en torno a progresiones de aprendizaje, lo que significa que cada nuevo concepto se construye sobre los conocimientos previos, con actividades, ejemplos, ejercicios, exploraciones gráficas y reflexiones que estimulan el pensamiento crítico.

Cada progresión contiene:

- Enganchar: una situación interesante, una paradoja, una pregunta o una historia que despierta la curiosidad y conecta el tema con tu vida.
- Explorar: actividades intuitivas o experimentales para descubrir los conceptos antes de formalizarlos, desarrollando un aprendizaje activo.
- Explicar: el momento en el que aterrizamos los conceptos con claridad, precisión y ejemplos bien guiados, con ilustraciones y múltiples formas de representación (gráficas, simbólicas, verbales y numéricas).
- Elaborar: una serie de ejercicios, problemas contextualizados, actividades colaborativas o de modelación que llevan al dominio de la idea.
- Evaluar: preguntas de opción múltiple, retos, autoevaluaciones y actividades finales para que puedas verificar tu aprendizaje y fortalecerlo.

Además, a lo largo del libro encontrarás:

Cápsulas de la Nueva Escuela Mexicana, que vinculan tu aprendizaje con el entorno, la ciudadanía responsable y el desarrollo de habilidades para la vida.
¿Sabías que...?, con datos curiosos, históricos o tecnológicos que muestran cómo el cálculo está en todas partes: desde la física hasta la medicina, desde la economía hasta la inteligencia artificial.

Ejemplos resueltos paso a paso, para que puedas seguir el razonamiento con claridad.
Problemas de modelado real, con contextos como la empresa Ruelas CORP, el diseño de puentes, la biología, el movimiento de cuerpos celestes o la eficiencia energética.

Aprender cálculo... ¿para qué? El cálculo no es una meta, sino una herramienta. Una forma de pensar, de modelar, de prever. Entender los límites nos enseña a ver el comportamiento de algo en los momentos cruciales. Las derivadas nos permiten saber con qué velocidad cambia algo, cómo optimizar recursos, minimizar costos o predecir tendencias. Las aplicaciones van desde el diseño de medicamentos hasta el desarrollo de algoritmos para inteligencia artificial.

Pero más allá de su utilidad técnica, este libro busca que te apropies del cálculo como una forma de mirar el mundo con ojos más agudos, con pensamiento analítico, con apertura a la complejidad, y con la capacidad de construir soluciones matemáticamente sólidas.
Un libro vivo, Este libro está pensado como una herramienta flexible. Puedes usarlo en clase o en casa, individualmente o en equipo, con calculadora o a mano. Puedes subrayarlo, comentarlo, criticarlo, cuestionarlo. Y sobre todo: puedes hacerlo tuyo. Cada progresión no solo es un tema de cálculo, sino una oportunidad para entender, explorar, aplicar y transformar.
Te invitamos a embarcarte en esta aventura con mente abierta, curiosidad despierta y lápiz en mano. El cálculo está por todas partes.


1
2
3
4
5
6
7
8

8 PRINCIPIOS DE LA NUEVA ESCUELA MEXICANA

NEM
MCCEMS

1 FOMENTAR LA IDENTIDAD CON MÉXICO

Favorece el amor a la patria, el aprecio de la cultura, historia y valores de nuestro país, respetando la diversidad cultural y de pensamiento.

2 RESPONSABILIDAD CIUDADANA

Impulsa el uso de valores y de los derechos humanos en pro del desarrollo del individuo y de la comunidad.

3 HONESTIDAD

Se enfatiza este valor para desarrollar la confianza y la congruencia dentro de la comunidad.

4 PARTICIPACIÓN EN LA TRANSFORMACIÓN DE LA SOCIEDAD

Trabajar de manera conjunta con los miembros de la comunidad y no sólo de la manera individual para la resolución de problemas comunes.

5 RESPETO A LA DIGNIDAD HUMANA

Respetar, ejercer y promover los derechos humanos.

6 INTERCULTURALIDAD

Fomentar el reconocimiento, respeto y aprecio por la diversidad cultural y lingüística que existe en nuestro país.

7 CULTURA DE LA PAZ

Favorecer la resolución de conflictos mediante el diálogo constructivo que deriven en acuerdos y no a través de la violencia. Promover la solidaridad y la búsqueda de una sociedad pacífica con desarrollo sostenible, inclusiva y con igualdad de oportunidades.

8 RESPETO A LA NATURALEZA

Incentivar la conciencia, el conocimiento, la protección y conservación del entorno.

MCCEMS

MARCO CURRICULAR COMÚN DE LA EDUCACION MEDIA SUPERIOR

CURRÍCULUM FUNDAMENTAL

Recursos Sociocognitivos:
- Lengua y comunicación
- Pensamiento matemático
- Conciencia histórica
- Cultura digital

Áreas de Conocimiento:
- Ciencias naturales, experimentales y tecnología
- Ciencias sociales
- Humanidades

CURRÍCULUM AMPLIADO

Recursos Socioemocionales
- Responsabilidad social
- Cuidado físico corporal
- Bienestar emocional afectivo

Ámbitos de la Formación Socioemocional
- Práctica y colaboración ciudadana
- Educación integral en sexualidad y género
- Actividades físicas y deportivas
- Actividades artísticas y culturales
- Educación para la salud

Categorías, subcategorías, conceptos centrales y transversales

Metas de aprendizaje

Aprendizajes de trayectoria – Perfil de ingreso y egreso

EXPEDICIÓN

¡Bienvenidos a bordo a nuestra experiencia de aprendizaje!

En esta emocionante travesía, hemos diseñado una secuencia didáctica que equipara el proceso de enseñanza-aprendizaje con un viaje inolvidable. Al igual que en cualquier paseo, nuestro recorrido educativo consta de tres momentos fundamentales:

La fase de inicio "SALIDA"

La fase de desarrollo "TRAVESÍA"

La fase de cierre "META"

MOMENTO 1

SALIDA
(INICIO)

Es la sección en la que nos alistamos para comenzar nuestro viaje educativo. Identificamos la progresión y comprendemos sus componentes.

Equipaje de mano

- Metas
- Categorías
- Subcategorías

Las 5E representan cinco fases clave en el proceso de aprendizaje.

Enganchar

Se busca captar el interés de los estudiantes y activar sus conocimientos previos mediante preguntas detonadoras, imágenes, videos o lecturas.

8 Principios de la Nueva Escuela Mexicana

NEM
MCCEMS

MAPA DEL APRENDIZAJE

MOMENTO 2 TRAVESÍA (DESARROLLO)

Aquí nos profundizamos en el corazón de la enseñanza y el aprendizaje. Esta fase es el núcleo de nuestro recorrido educativo, donde exploramos conceptos, practicamos habilidades y nos sumergimos en el conocimiento.

Explorar
Se crean situaciones de aprendizaje para que el estudiante active su conocimiento, investigando el tema, se fomenta el trabajo activo a través de actividades practicas, experimentos, observaciones, etc.

Explicar
Se tratan los contenidos de la progresión, se proporciona la base teórica para comprender los temas, se presenta informacion relevante, conceptos clave y explicaciones claras.

Elaborar
Los estudiantes aplican los conocimientos adquiridos y apropiados desarrollando habilidades mediante la elaboración de diferentes instrumentos que permiten profundizar y comprender el tema.

MOMENTO 3 META (CIERRE)

Es el momento de finalizar nuestro paseo educativo y asegurarnos de que todos los aprendizajes se consoliden. Aquí reflexionamos sobre lo aprendido, evaluamos nuestro progreso y nos preparamos para futuras aventuras educativas.

Evaluar
Por último, se evalúa el aprendizaje de los estudiantes para determinar si han alcanzado los objetivos de la progresión.

Recursos Educativos

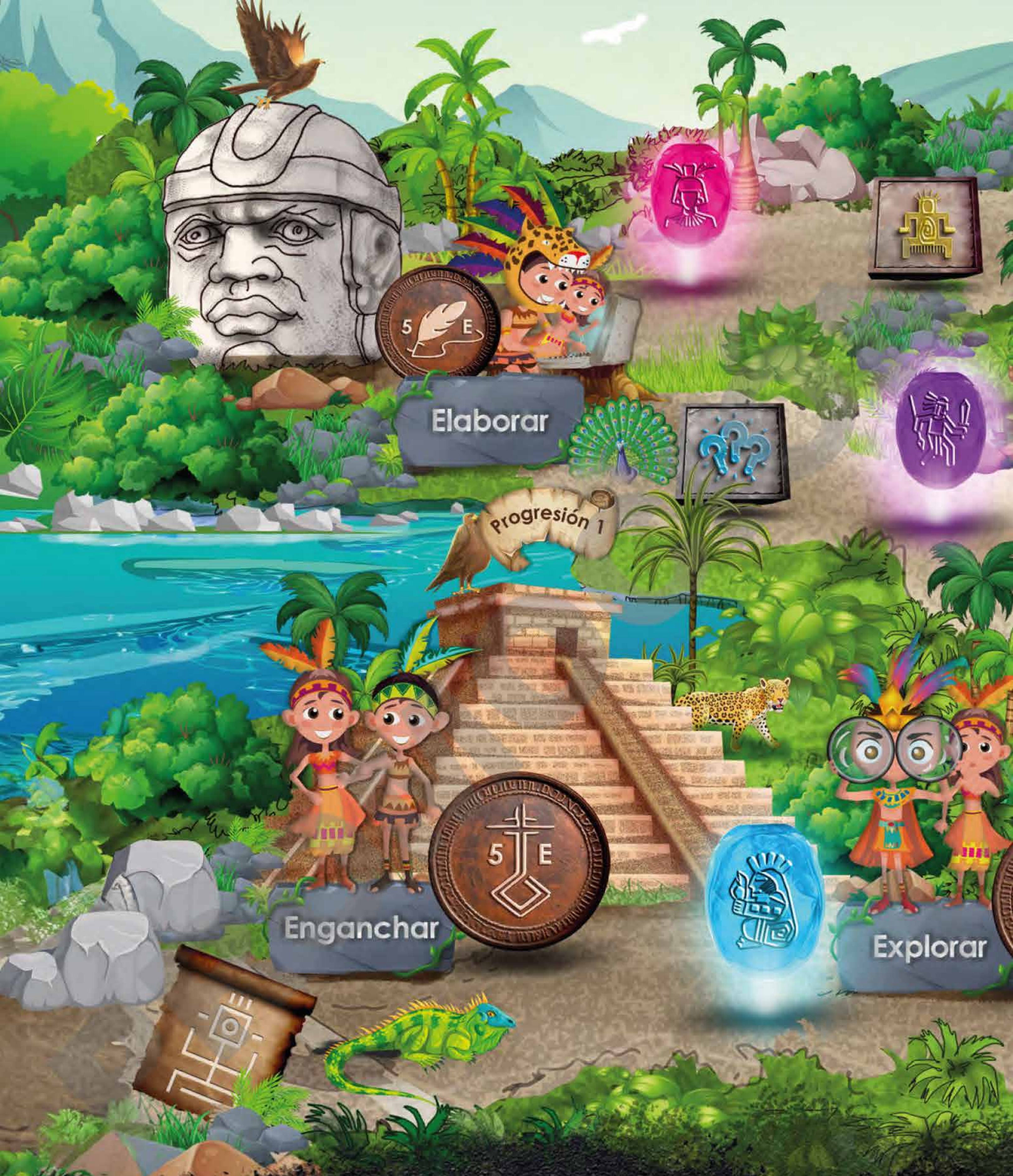
- SABÍAS QUÉ?
- MOMENTO DE REFLEXIÓN
- TEMA INTEGRADOR
- TRANSVERSALIDAD

Recursos Socioemocionales

- CUIDADOS FÍSICOS
- BIENESTAR EMOCIONAL AFECTIVO
- RESPONSABILIDAD SOCIAL

Ámbitos de la Formación Socioemocional

- PRÁCTICA Y COLABORACIÓN CIUDADANA
- EDUCACIÓN INTEGRAL EN SEXUALIDAD Y GÉNERO
- ACTIVIDADES FÍSICAS Y DEPORTIVAS
- EDUCACIÓN PARA LA SALUD
- ACTIVIDADES ARTÍSTICAS Y CULTURALES



La serie Expedición, diseñada para el subsistema Conalep, sigue el modelo de las 5E: Enganchar, Explorar, Explicar, Elaborar y Evaluar, con base en los 8 principios de la Nueva Escuela Mexicana.

CAMINO A LA META

La estructura metodológica se compone de tres fases: la 'salida' es el inicio, la 'travesía' es el desarrollo, y la 'meta' es el cierre.

UNIDAD DE APRENDIZAJE 1

Introducción al pensamiento variacional

36 horas

Propósito de la unidad

Aplicar los fundamentos epistemológicos del pensamiento variacional, los conceptos de límites y continuidad de las funciones para expresar el comportamiento de situaciones y fenómenos. 24 horas

RESULTADO DE APRENDIZAJE

1.1

Analiza los fundamentos epistemológicos del pensamiento variacional en situaciones o fenómenos cotidianos donde el cambio está presente.

12 horas

PROGRESIÓN DE APRENDIZAJE

1. Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo. (C2M1)

Categoría:

- C1 Procesos de intuición y razonamiento

Subcategoría:

- S1 Pensamiento intuitivo

Meta de aprendizaje:

- M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.

2. Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado. (C3M1, C4M1)

Categoría:

- C2 Solución de problemas y modelación
- C3 Interacción y lenguaje matemático

Subcategoría:

- S2 Uso de modelos
- S3 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográficoo

Metas de aprendizaje:

- M2 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
- M3 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas. (C3M1)

Categoría:

- C2 Solución de problemas y modelación
- C3 Interacción y lenguaje matemático

Subcategoría:

- S2 Uso de modelos

Meta de aprendizaje:

- M2 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.

4. Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático. (C3M1)

Categoría:

- C2 Solución de problemas y modelación

Subcategoría:

- S2 Uso de modelos

Metas de aprendizaje:

- M2 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.

APRENDIZAJES DE TRAYECTORIA

- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.)
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje.

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN

1.1.1 Elabora una línea del tiempo representando los eventos históricos del origen del cálculo diferencial.

EVIDENCIA A RECOPILAR	PONDERACIÓN
Línea del tiempo	10 %

Evaluación Diagnostica

A. Lee y responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el resultado de la expresión $(2x - 3)+(4x + 5)$

a) $6x + 86$ b) $6x + 2$ c) $2x - 82$ d) $4x + 24$

2. La factorización de $x^2 - 9$ es:

a) $(x-9)(x+9)$ b) $(x-3)(x+3)$ c) $(x-3)^2$ d) No se puede factorizar

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $(x + 2)(x - 2)$?

a) $x^2 + 4$ b) $x^2 - 4$ c) $x^2 - 2x$ d) $x^2 + 2x + 4$

4. Si se tiene la ecuación $2x - 5 = 3x + 1$, ¿cuál es el valor de x?

a) $x = -6$ b) $x = 6$ c) $x = -3$ d) $x = 3$

5. ¿Cuál de los siguientes es el valor de x en la ecuación $x^2 = 25$?

a) $x = 5$ b) $x = -5$ c) $x = \pm 5$ d) $x = 0$

6. Si la ecuación de una función es $y = 3x - 2$, ¿qué tipo de función es?

a) Lineal b) Cuadrática c) Exponencial d) Racional

7. Si en una función, cada valor de x tiene dos valores de y, entonces:

a) Es una función válida b) No es una función

c) Se trata de una función cuadrática d) Se trata de una función par

8. ¿Qué indica el coeficiente de x en la función lineal $y = mx + b$?

a) El punto donde la gráfica corta el eje y b) La pendiente de la recta

c) El valor de la variable independiente d) No tiene ningún significado

9. Un estudiante compra x cuadernos a \$25 cada uno y un lápiz que cuesta \$10. ¿Cuál expresión representa el costo total?

a) $25x + 10$ b) $10x+25$ c) $35x$ d) $25+x+10$

10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera sobre el número π?

a) Es un número racional
b) Tiene un valor exacto
c) Su desarrollo decimal es infinito y no periódico
d) Es menor que 3

11. Un rectángulo tiene un largo de $2x + 3$ y un ancho de $x - 1$. ¿Cuál es la expresión que representa su área?

a) $2x^2 - x - 3$ b) $2x^2 + x - 3$ c) $2x^2 - x + 3$ d) $2x^2 + x + 3$

12. ¿Cuál de los siguientes conjuntos contiene únicamente números irracionales?

a) $\{2,\pi,5\}$ b) $\{\pi,\sqrt{2},e\}$ c) $\{\sqrt{16},-3,0.5\}$ d) $\{3.14,22/7,\pi\}$

13. Si la función $f(x)$ está definida como $f(x) = x^2 - 4x + 3$, ¿cuál de los siguientes valores hace que $f(x) = 0$?

a) $x = 3, x = 1$ b) $x = -3, x = -1$ c) $x = 4, x = 2$ d) $x = 0, x = -4$

14. Si la ecuación de una recta es $y = -2x + 5$, su pendiente es:

a) -2 b) 5 c) 2 d) -5

15. En una tienda, el costo total de comprar x camisetas a \$120 cada una se expresa como:

a) $120 + x$ b) $120x$ c) $120x + 1$ d) $120 - x$

16. Un número elevado a la potencia cero es siempre igual a:

a) 0 b) 1 c) -1 d) Depende del número

17. Si se tienen dos números x y y que cumplen $x + y = 10$ y $x - y = 2$, ¿cuál es el valor de x?

a) $x = 4$ b) $x = 6$ c) $x = 5$ d) $x = 8$

Introducción al cálculo a través de la historia y la filosofía

Progresión de aprendizaje 1

Equipaje de mano

Categorías C1
Subcategorías S1
Metas M1

Generar intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.

SALIDA
(INICIO)

ENGANCHAR

A. Reflexionen sobre las siguientes preguntas y discútanlas en equipos. Contesten en su cuaderno.

1. ¿Cómo podemos medir el cambio en algún fenómeno físico, como el movimiento de un auto o el crecimiento de una planta?
2. Si divides un hilo en mitades una y otra vez, ¿habrá un momento en que ya no puedas dividirlo más o podríamos seguir infinitamente? ¿Sucede lo mismo en el mundo matemático?
3. ¿Puede existir algo infinito en el mundo físico o sólo en la mente?

TRAVESÍA
(DESARROLLO)

Si te colocas entre dos espejos frente a frente, observarás una secuencia de reflejos que parecen extenderse sin fin.

Observa cuántas veces se repite tu imagen en los reflejos. Luego, coloca una pluma u otro objeto pequeño entre los espejos y cuenta cuántas veces aparece reflejada.

EXPLORAR

Contesta en tu cuaderno:
¿Por qué los reflejos parecen repetirse al infinito?

¿Existe un límite para esta repetición?

Si cada reflejo es más tenue que el anterior,

¿podemos decir que, en algún momento, el reflejo desaparece?

Matemáticamente,

¿cómo se relaciona este fenómeno con la idea del infinito?

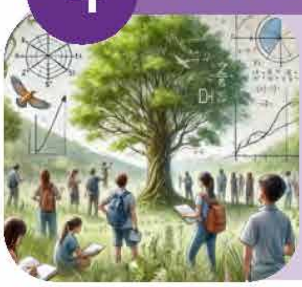
¿Un número puede "desvanecerse" como los reflejos en un espejo?

¿Crees que el infinito es una realidad física o sólo una construcción de la mente humana?

¿SABÍAS QUÉ...?

El símbolo del infinito (∞), conocido como lemniscata, fue introducido en el siglo XVII por el matemático John Wallis. Su forma proviene de la lemniscata de Bernoulli, una curva con propiedades fascinantes que simboliza un proceso sin fin.

4 PARTICIPACIÓN EN LA TRANSFORMACIÓN DE LA SOCIEDAD



La Nueva Escuela Mexicana promueve el desarrollo del pensamiento crítico a través del análisis de fenómenos naturales y sociales. Al estudiar la variación y el cambio en distintos contextos, como el crecimiento de un árbol o la velocidad de un auto, los estudiantes comprenden cómo las matemáticas modelan el mundo real y contribuyen a la solución de problemas cotidianos.

EXPLICAR

Desde tiempos inmemoriales, la humanidad ha intentado comprender y describir los fenómenos que la rodean. La trayectoria de un objeto en movimiento, el crecimiento de una población, la propagación de una enfermedad, o el flujo de un río, son procesos que, aunque diversos en su esencia, comparten una característica fundamental; cambian con el tiempo o con respecto a otras variables.

Funciones

Para entender estos cambios, los matemáticos desarrollaron las *"funciones"*; herramientas que permiten modelar situaciones del mundo real.

Una función es una regla que establece una relación y asigna a cada elemento de un conjunto de entrada (denominado dominio) un único elemento en un conjunto de salida (rango). Gracias a ellas, podemos predecir comportamientos, hacer cálculos precisos y descubrir patrones ocultos en la naturaleza. Cuando se representan gráficamente, las funciones nos muestran cómo una cantidad varía con respecto a otra, permitiéndonos analizar tendencias, identificar puntos clave y calcular tasas de cambio.

Por ejemplo, los árboles crecen a diferentes ritmos dependiendo de factores como la especie, el clima y la disponibilidad de recursos. Para modelar este crecimiento, podemos utilizar una función matemática que nos ayude a predecir la variación de la altura en función del tiempo.

Supongamos que la altura de un árbol en metros, después de t años, está dada por la siguiente función:

$$h(t) = 0.5t^2 + 0.8t + 1$$

donde:

- $h(t)$ representa la altura del árbol en metros.
- t es el número de años desde que el árbol comenzó a crecer.

¿Cuál es la altura del árbol en el año 1,2,3 y 4?

Cuando $t = 1$ año

$$h(t) = 0.5t^2 + 0.8t + 1$$

$$h(1) = 0.5(1)^2 + 0.8(1) + 1$$

$$h(1) = 2.3\ m$$

Cuando $t = 2$ año

$$h(t) = 0.5t^2 + 0.8t + 1$$

$$h(2) = 0.5(2)^2 + 0.8(2) + 1$$

$$h(2) = 4.6\ m$$

Cuando $t = 3$ año

$$h(t) = 0.5t^2 + 0.8t + 1$$

$$h(3) = 0.5(3)^2 + 0.8(3) + 1$$

$$h(3) = 7.9\ m$$

Cuando $t = 4$ año

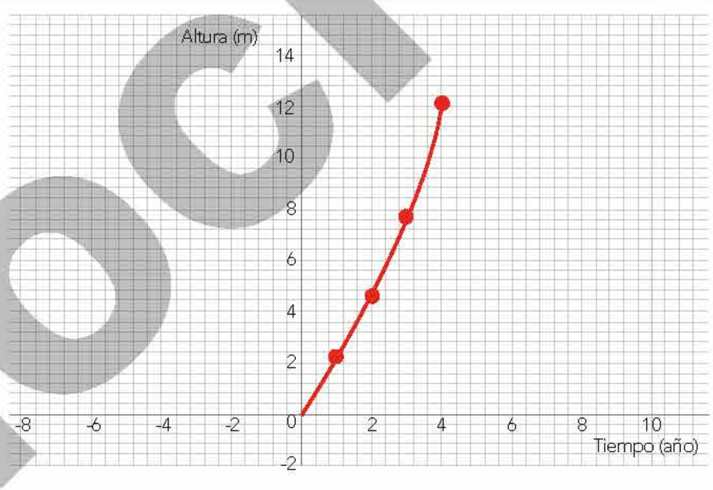
$$h(t) = 0.5t^2 + 0.8t + 1$$

$$h(4) = 0.5(4)^2 + 0.8(4) + 1$$

$$h(4) = 12.2\ m$$

Resultados en una tabla y en una gráfica:

Tiempo (año)	1	2	3	4
Altura (m)	2.3	4.6	7.9	12.2



Cuando observamos el crecimiento del árbol, podemos analizarlo desde dos perspectivas: la variación promedio, que mide el cambio en un intervalo de tiempo, y la variación instantánea, que nos dice cómo está cambiando en un momento preciso.

Variación promedio	Variación instantánea
La variación promedio del crecimiento entre dos puntos, como B y C, nos dice cuánto ha crecido el árbol en ese intervalo de tiempo, sin importar si en algunos momentos creció más rápido o más lento. Es un valor general que nos permite entender el cambio total a lo largo del periodo, pero no nos da detalles sobre cómo ocurrió ese cambio en cada instante.	Nos dice qué tan rápido está creciendo el árbol en un momento exacto. Se calcula considerando un intervalo de tiempo extremadamente pequeño, lo que nos permite ver el crecimiento en ese preciso instante. Mientras que la variación promedio es una forma de resumir el cambio en un periodo, la variación instantánea nos muestra cómo ese cambio ocurre en tiempo real.

La variación instantánea, busca capturar el cambio en un punto específico, allí donde el tiempo se congela (donde el tiempo tiende a cero). Se expresa a través del concepto matemático de límite, que nos indica la razón de cambio en un instante infinitamente pequeño.

Incrementos decrementos y tasas de cambio

El incremento ya sea positivo o negativo (decremento) representa el cambio en una cantidad cuando ésta pasa de un valor inicial a uno final. Se denota con la letra griega Δ y se calcula restando el valor final del inicial:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

La tasa de cambio nos permite saber con qué rapidez varía una cantidad en relación con otra. Se obtiene dividiendo el incremento en la variable dependiente (Δy) entre el incremento en la variable independiente (Δx):

$$Tasa\ de\ cambio = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

El incremento y la tasa de cambio nos permiten comprender y medir la transformación de nuestro mundo. Uno nos dice cuánto cambia una cantidad, mientras que el otro nos indica a qué ritmo ocurre ese cambio. Pero cuando llevamos estos conceptos al extremo y analizamos lo que sucede en un instante infinitamente pequeño, nos adentramos en el terreno del cálculo.

Ejemplo: El precio de la gasolina varió de la siguiente manera durante el año.

Enero 2024	$ 22.320
Marzo 2024	$ 23.950
Diciembre 2024	$ 23.850
2 de enero 2025	$ 24.065
9 de enero 2025	$ 24.230
15 de febrero 2025	$ 24.269

Calcula el incremento en el precio de la gasolina Magna desde enero de 2024 hasta 15 de febrero de 2025.

1. Calcular el incremento de precio (ΔP):

$$\Delta P = 24.269\ \text{MXN} - 22.320\ \text{MXN} = 1.949\ \text{MXN}$$

2. Calcular el intervalo de tiempo (Δt):
   Del 2 de enero al 15 de febrero hay 44 días.

3. Calcular la tasa de cambio promedio:

$$\text{Tasa de cambio} = \frac{0.204\ \text{MXN}}{44\ \text{días}} = 0.00464\,\frac{\text{MXN}}{\text{días}}$$

Esto significa que, en promedio, el precio de la gasolina Magna aumentó aproximadamente 0.00464 pesos por litro cada día durante este período.

El concepto de incremento nos permite medir el cambio en una función cuando pasamos de un valor inicial a otro. En términos generales, se expresa como la diferencia entre los valores finales e iniciales de la variable independiente Δx y de la variable dependiente Δy.

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad\qquad \Delta y = y_2 - y_1$$

Este incremento puede ser positivo cuando la función aumenta, o negativo si la función disminuye.

Dado que en matemáticas analizamos funciones $y = f(x)$, podemos expresar el incremento de la función en términos de evaluación:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Si sustituimos x_2 con su expresión en términos del incremento:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Ejemplo 1: Cuánto aumenta la función cuando incrementa su valor de $x = 2ax = 2.5$

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$$

Si $x = 2$ y el incremento en x es $\Delta x = 0.5$, calculamos el incremento en y:

Paso 1: Evaluar $f(x + \Delta x)$

$$f(2 + 0.5) = 2(2 + 0.5)^2 + 3(2 + 0.5) - 5$$
$$f(2.5) = 2(6.25) + 7.5 - 5$$
$$f(2.5) = 15$$

Paso 2: Evaluar $f(x)$ en $x = 2$

$$f(2) = 2(2)^2 + 3(2) - 5$$
$$f(2) = 9$$

Paso 3: Calcular el incremento Δy

$$\Delta y = f(2.5) - f(2) = 15 - 9 = 6$$

Esto significa que cuando x pasa de 2 a 2.5, la función aumenta en 6 unidades.

El incremento nos dice cuánto cambió una función en un intervalo dado, pero la tasa de cambio nos indica qué tan rápido se produce ese cambio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ejemplo dos: Calcula la tasa de cambio promedio de la función

$f(x)=\frac{3x^2+1}{x}$ si $x=5$ y el incremento es de $\Delta x = 0.3$.

Solución: calculamos por partes la siguiente operación.

Evaluamos la función $f(x+\Delta x)$:

$$f(5+0.3)=\frac{3(5+0.3)^2+1}{5+0.3}=16.08$$

Evaluamos la función $f(x)$:

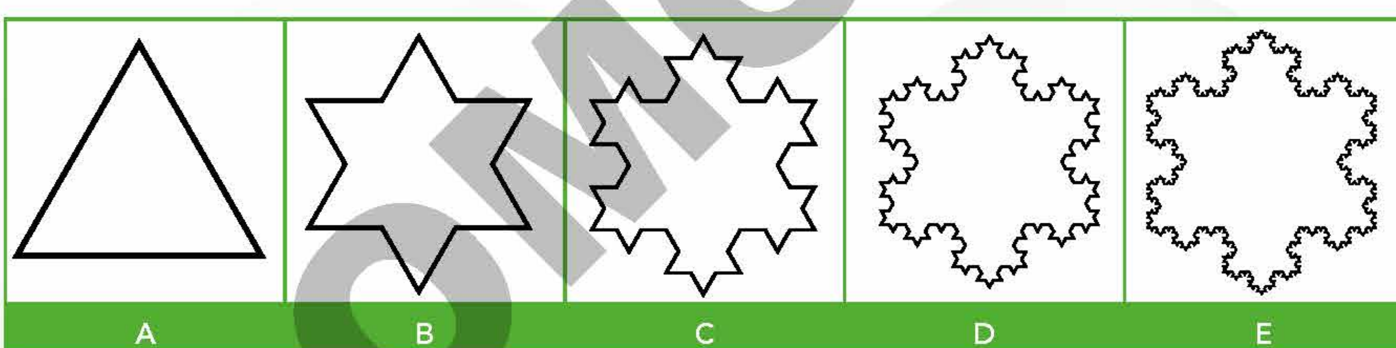
$$f(5)=\frac{3(5)^2+1}{(5)}=15.2$$

Sustituimos en la fórmula de tasa de cambio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{16.08-15.2}{0.3}=2.96$$

Procesos infinitos

Para entender mejor esto imagina que comienzas con un triángulo dibujado en una hoja, observa cómo evoluciona su forma y su perímetro en cada paso:



División en mitades: Si tu maestro te pidiera dividir cada lado del triángulo a la mitad y luego construir una nueva figura siguiendo esta estructura, ¿Cómo cambiaría su perímetro? Tómate un momento para analizarlo. (Figura B)

División en tercios: Ahora, si en lugar de mitades, dividimos cada lado en tres partes iguales y en cada sección central agregamos un triángulo equilátero dirigido hacia afuera, observa nuevamente cómo el perímetro ha aumentado. (Figura C)

Repetición del proceso: Si repetimos el mismo procedimiento, es decir, dividimos cada lado en tres partes iguales y agregamos un nuevo triángulo en cada segmento central, la figura continúa transformándose. ¿Cómo cambia el perímetro ahora? (Figura D)

Iteración infinita: Si seguimos repitiendo este proceso indefinidamente, dividiendo en tres partes iguales y agregando nuevos triángulos en cada tercio medio, el perímetro sigue creciendo en cada paso. ¿Podemos decir que este crecimiento es infinito? ¿Cuál crees que será la forma final de la figura si el proceso continúa infinitamente? (Figura E)

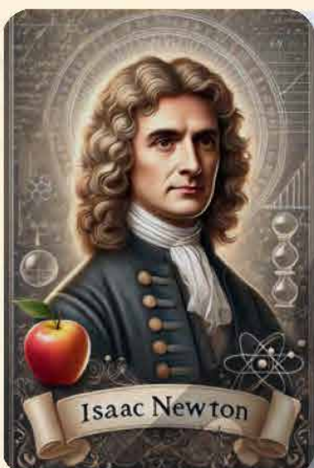
Al final tendríamos una figura de perímetro infinito en una hoja finita.

Desde la antigüedad, los matemáticos y filósofos han intentado comprender el cambio y el infinito. Los procesos infinitos llevaron a la necesidad de definir límites, ya que estos permiten calcular valores precisos en situaciones donde la repetición de pasos infinitamente pequeños converge hacia un resultado finito.

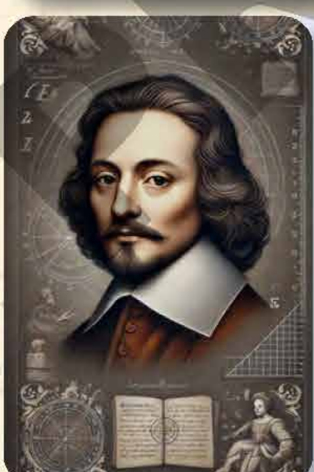
Uno de los primeros problemas matemáticos que evidenció esta necesidad fue la paradoja de Aquiles y la tortuga, planteada por Zenón de Elea en el siglo V a.C. Según Zenón, si Aquiles da ventaja a una tortuga en una carrera, cuando llegue a su punto de partida, la tortuga habrá avanzado un poco más. Este proceso se repite infinitamente, lo que sugiere que Aquiles nunca la alcanzará. Matemáticamente, la paradoja parece indicar que una suma infinita de distancias impide el movimiento, pero el desarrollo del cálculo mostró que esta sucesión infinita puede tener una suma finita mediante el concepto de límite.

Otro ejemplo clave es el método de exhaución de Arquímedes, quien aproximó el área de un círculo utilizando polígonos de cada vez más lados. A medida que el número de lados del polígono aumentaba, la figura se asemejaba más al círculo, pero sin llegar a serlo. Este proceso anticipó la idea moderna de límite, donde un valor puede aproximarse indefinidamente sin alcanzarse exactamente.

Newton y Leibniz creadores del Cálculo Diferencial: Si bien muchos matemáticos hicieron contribuciones fundamentales, el cálculo diferencial e integral fue desarrollado y formalizado en el siglo XVII por Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716). Ambos trabajaron de manera independiente para desarrollar el cálculo.



- Newton, influenciado por los estudios de Galileo y Kepler, utilizó el cálculo para describir el movimiento de los cuerpos y formuló sus famosas leyes de la mecánica y la gravitación universal.



- Leibniz, por su parte, introdujo la notación matemática del cálculo, incluyendo los símbolos que hoy utilizamos, como la integral $\int$ y la derivada $\frac{dx}{dy}$

5 E ELABORAR

B. Evalúa las siguientes funciones en los puntos indicados.

$f(x) = 2x^2 + 7x + 3$ Evalúa en $f(-3)$	$f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x$ Evalúa en $f(2)$

C. Evalúa en tu cuaderno las siguientes funciones. Coloca los resultados únicamente.

$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ Evalúa $f(3)$ __________

$g(x) = 7x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$ Evalúa $g(-2)$ __________

$h(x) = 2x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 8x^2 + x - 4$ Evalúa $h(1)$ __________

$p(x) = 6x^6 - 4x^5 + x^3 - 7x^2 + 2x + 9$ Evalúa $p(-1)$ __________

$q(x) = -3x^7 + 2x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 2x + 5$ Evalúa $q(2)$ __________

$r(x) = 8x^4 - 3x^3 + x^2 - 6x + 11$ Evalúa $r(-3)$ __________

$s(x) = 5x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 2x + 8$ Evalúa $s(0)$ __________

$t(x) = -2x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 7x - 2$ Evalúa $t(1)$ __________

$u(x) = 9x^7 - 5x^6 + 2x^4 - 8x^3 + 4x - 3$ Evalúa $u(2)$ __________

$v(x) = 10x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + x - 5$ Evalúa $v(-2)$ __________

$g(x) = \frac{3}{2}x^3 - 4\sqrt{x} + 5$ Evalúa $g(4)$ __________

$g(x) = 9x^{\frac{7}{2}} - \frac{5x^6}{4} + \frac{2}{x^4} - 8x^3 + \frac{4}{\sqrt{x}} - 3$ Evalúa $g(1)$ __________

D. **Resuelve las siguientes evaluaciones de funciones con sustitución algebraica.**

Evalúa la ecuación $f(x) = x^3 + 7x - 2$ en el punto $f(a+b)$:

Solución:

Para este caso $f(a+b)$, sustituye "$a+b$" en todos los lugares donde aparezca "x".

$$f(a+b) = (a+b)^3 + 7(a+b) - 2$$

Recuerde que el binomio al cubo se resuelve. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$f(a+b) = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 7a + 7b - 2$$

$g(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 2$ Evalúa $g(-a)$

____

$g(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 2$ Evalúa $g(a - b)$

____

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ Evalúa $f(a + b)$

____

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ Evalúa $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

____

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ Evalúa en $f(a + b) - f(a)$

____

E. Determina el incremento de las siguientes funciones en tu cuaderno y anota los resultados:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ si $x = 1$ y $\Delta x = 2$ ____________

$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x}$ $x = \frac{1}{2}, \Delta x = 1$ ____________

$f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ $x = 1, \Delta x = \frac{1}{2}$ ____________

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$ $x = 2, \Delta x = 2$ ____________

F. Determina la tasa de cambio en tu cuaderno y anota los resultados:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, si $x = 2$ $\Delta x = 0.3$ ____________

$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 3}$ $x = 1, \Delta x = \frac{1}{2}$ ____________

$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ $x = 2, \Delta x = \frac{1}{3}$ ____________

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $x = \frac{3}{2}, \Delta x = \frac{1}{2}$ ____________

Sea la función $h(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{4}t + 1$ que describe la altura de un árbol (en metros) después de t años.

a) Evalúa la función en $t = 0{,}1{,}2{,}5$. ______________________________

b) ¿Cuál es el incremento de la altura del árbol entre los años $t = 2$ y $t = 5$? ____________

c) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio entre $t = 2$ y $t = 5$? ____________

EVALUAR

G. Con los conocimientos adquiridos en esta progresión, responde a las siguientes preguntas.

META
(CIERRE)

1. ¿Cómo se relaciona la variación promedio con la manera en que percibimos el cambio en el mundo físico?

   a) Nos permite conocer cómo cambia algo en cada instante exacto.
   b) Nos ayuda a resumir el cambio total en un intervalo sin importar sus variaciones internas.
   c) Es una herramienta matemática sin aplicaciones en la vida real.
   d) Nos dice cómo varía una cantidad a una escala infinitamente pequeña.

2. Los filósofos y matemáticos antiguos enfrentaron dificultades al tratar de definir el movimiento de un objeto en un solo instante. ¿Qué idea permitió resolver este problema en las matemáticas?

   a) La noción de que los números pueden ser infinitamente pequeños y sumarse para describir el cambio.
   b) La teoría de los números primos de Euclides.
   c) La idea de que el movimiento sólo ocurre en intervalos grandes y no en un solo instante.
   d) La ley de la gravedad de Newton.

3. Zenón de Elea planteó la paradoja de Aquiles y la tortuga, en la que Aquiles nunca alcanzaría a la tortuga debido a la división infinita del espacio y el tiempo. ¿Cómo resolvió el cálculo moderno esta paradoja?

   a) Demostró que la suma infinita de distancias puede converger a un valor finito mediante el concepto de límite.
   b) Propuso que Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga porque siempre quedará una distancia infinita.
   c) Usó la teoría de conjuntos para definir el infinito como una cantidad exacta.
   d) Introdujo la idea de velocidad constante para negar la existencia del infinito.

4. Si la función que describe la altura de un árbol es $h(t) = 2t^2 + 3t + 1$ ¿Cuál es la altura del árbol cuando $t = 3$?

   a) 20 b) 25 c) 28 d) 32

5. Dado que el precio de la gasolina en enero era de \$22.50 y en marzo subió a \$24.30, ¿cuál fue el incremento?

   a) \$1.50 b) \$1.80 c) \$2.00 d) \$2.30

6. Dada la función $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ ¿Cuál es el incremento en $f(x)$ cuando x pasa de 2 a 4?

   a) 12 b) 16 c) 28 d) 20

7. Dada la función $g(x) = 5x^2 + 3x$. Calcula la tasa de cambio promedio entre $x=2$ y $x=4$.

   a) 6.5 b) 33 c) 8.5 d) 9.5

El viaje por la historia y filosofía del cálculo llega a su fin, pero el tuyo apenas comienza. Sigue explorando, cuestionando y resolviendo, porque en el estudio del cálculo encontrarás infinitas posibilidades

El problema de la tangente y los orígenes del cálculo diferencial

Progresión de aprendizaje 2

Equipaje de mano

Categorías	C2, C3
Subcategorías	S2, S3
Metas	M2, M3

SALIDA (INICIO)

Analizar de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.

ENGANCHAR

A. Reflexionen sobre las siguientes preguntas en equipos.

1. Si lanzas una pelota al aire, ¿puedes saber exactamente qué tan rápido se mueve en un instante preciso?

2. ¿Cómo crees que los matemáticos de la antigüedad lograban calcular el área de figuras irregulares antes de que existieran fórmulas precisas?

3. Si un virus se propaga rápidamente en una población, pero su ritmo de contagio cambia cada día, ¿cómo podríamos predecir la velocidad de propagación en un momento específico?

TRAVESÍA (DESARROLLO)

En la siguiente animación podrán manipular un punto en la gráfica de una función y observar cómo una recta secante (que corta a la curva en dos puntos) se transforma en una recta tangente cuando los puntos están extremadamente cerca. Accedan a la herramienta interactiva de GeoGebra en la siguiente dirección:

EXPLORAR

B. Después de explorar la animación, respondan las siguientes preguntas en sus cuadernos.

1. ¿Qué diferencia observaron entre una recta secante y una recta tangente?

2. ¿Cómo cambia la inclinación de la recta secante cuando los puntos se acercan

EXPLICAR

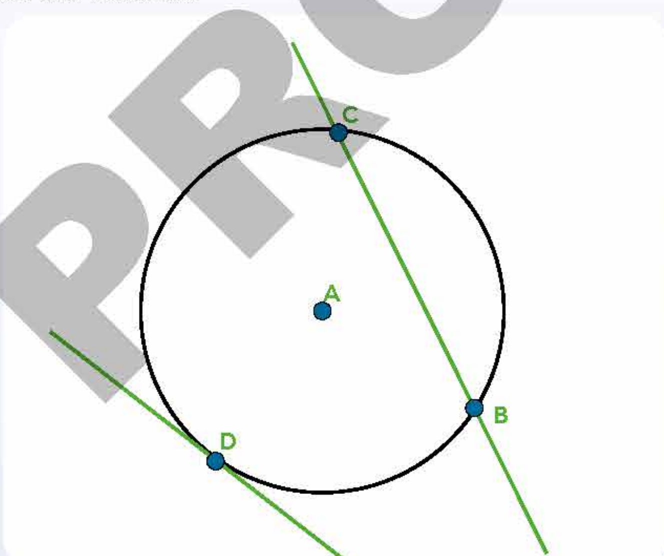
El cálculo diferencial surgió como respuesta a varios problemas matemáticos y científicos fundamentales que no podían resolverse con los métodos tradicionales. Entre los más importantes destacan:

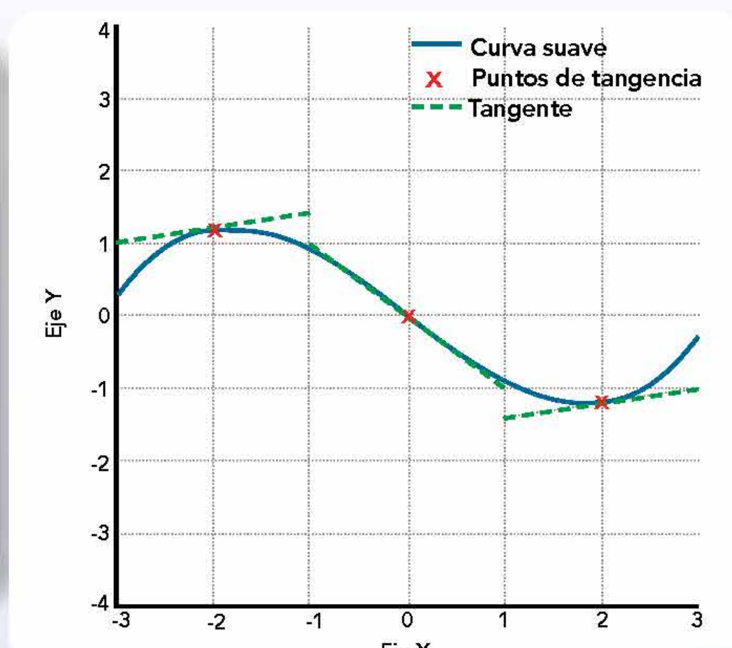
- **El problema de la tangente:** Los matemáticos se preguntaban cómo encontrar la pendiente de una curva en un punto específico. Si bien era fácil calcular la pendiente de una recta, determinar la inclinación en una curva requería un nuevo enfoque matemático.
- **El problema de la velocidad instantánea:** Saber con exactitud la velocidad de un objeto en un instante preciso. Por ejemplo, si un cuerpo en movimiento acelera o desacelera, ¿cómo podemos conocer su velocidad en un momento determinado sin considerar intervalos de tiempo grandes?
- **El problema del área bajo una curva:** Se buscaba una forma de calcular áreas limitadas por curvas, lo cual era crucial para problemas de física y geometría. Los métodos de sumas de áreas de rectángulos llevaron al desarrollo del cálculo integral.
- **El problema del infinito y los límites:** En el estudio de fenómenos físicos y geométricos, surgió la necesidad de trabajar con procesos infinitos. ¿Qué sucede cuando reducimos un intervalo de tiempo o una distancia hasta que es infinitamente pequeña? Este concepto fue clave para definir la derivada y el cálculo diferencial.

La recta tangente y secante

Antes de hablar de la recta tangente, es importante entender qué es una recta secante.
Una recta secante es una línea que corta a una curva en dos puntos distintos. En la figura, la recta que pasa por el punto C y el punto B, dentro de una circunferencia es una secante.

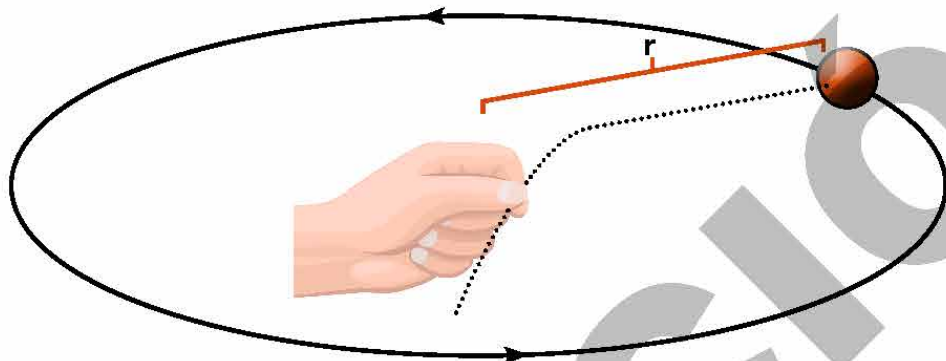
Una recta tangente es una línea que toca una curva en un solo punto sin atravesarla, la recta que pasa por D, es una tangente. En otras palabras, es la línea que representa la pendiente (dirección instantánea) de la curva en ese punto.





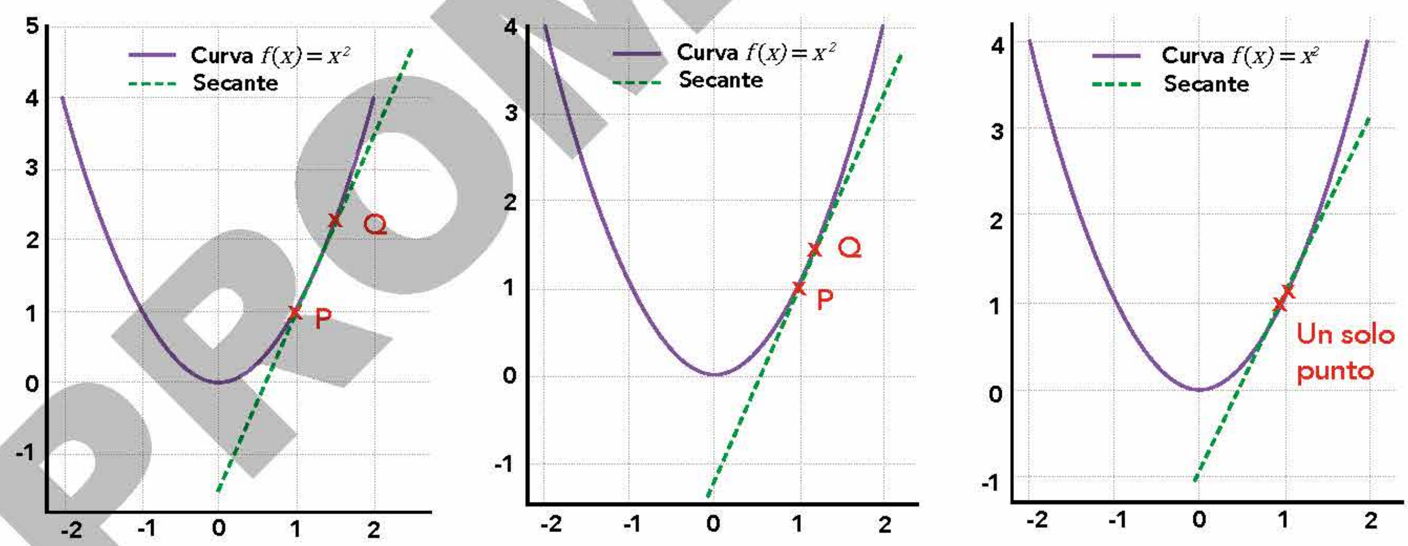
Desde el punto de vista del cálculo diferencial, la recta tangente es fundamental porque su pendiente mide la tasa de cambio instantánea, lo que permite analizar cómo una cantidad varía con respecto a otra. Imagina que tienes un objeto amarrado a una cuerda y lo haces girar en círculos. Mientras lo sostienes, el objeto sigue una trayectoria circular. Sin embargo, si en un momento sueltas la cuerda, el objeto no seguirá moviéndose en círculo, sino que se desplazará en línea recta. Esta trayectoria sigue exactamente la dirección de la recta tangente en el punto donde se soltó.

Este fenómeno se debe a la inercia: el objeto conserva la velocidad que tenía en el instante en que fue liberado, y esa dirección es precisamente la de la recta tangente a la trayectoria circular.



Visualización en una gráfica

Si representamos gráficamente una curva como la parábola $f(x) = x^2$ y trazamos varias rectas secantes, observamos que conforme la distancia entre los puntos donde se corta con la curva disminuye, la secante se acerca cada vez más a la tangente en un punto. Este proceso de aproximación desde ambos lados de x nos muestra que la tangente es el límite de las secantes cuando la distancia entre los puntos se reduce a cero, o a algo infinitamente pequeño.



A medida que el punto Q se acerca al punto P, la recta secante cambia su inclinación y se aproxima cada vez más a la recta tangente. En el límite más próximo, cuando Q coincide con P, la secante se convierte en la tangente, una recta que toca la curva en un solo punto sin atravesarla.

Determinar la pendiente de una recta tangente

Para una recta, la pendiente (m) se obtiene dividiendo el cambio en y entre el cambio en x, con la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Cambio\ en\ y}{Cambio\ en\ x}$$

En otras palabras, una recta tiene una pendiente constante, y se necesitan dos coordenadas de la misma recta para determinar la pendiente (m) con la fórmula antes descrita.

Pero cuando tenemos una curva, la pendiente no es constante. Para aproximar la pendiente en un punto, tomamos dos puntos muy cercanos en la curva, una recta secante, donde los puntos sean tan cercanos que prácticamente tengamos una tangente, tomamos las coordenadas $P_1\,(x+h, y)$, y $P_2\,(x, y)$, donde el valor de h debe de ser casi cero, para que ambas coordenadas estén muy cercanas y no afecte la pendiente.

La pendiente también se puede representar usando las coordenadas antes descritas como:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo: Determinar la recta tangente a la función $f(x) = x^2$, en el punto $x = 1$.

Paso 1: $f(x)$ Evaluamos la función en $x = 1$.

$$f(1) = (1)^2$$

$$f(1) = 1$$

La curva pasa por la coordenada A (1,1).

Paso 2: $f(x+h)$ Ahora evaluamos la función, en un $f(x+h)$, recuerda que h debe de ser casi cero, empecemos por probar $h = 0.1$.

$$f(1+0.1) = (1+0.1)^2$$

$$f(1+0.1) = (1.1)^2$$

$$f(1+0.1) = 1.21$$

HONESTIDAD 3

Honestidad en el Conocimiento Científico

El cálculo diferencial nació de la búsqueda de respuestas precisas sobre el movimiento y el cambio. Así como los matemáticos han sido honestos en la construcción del conocimiento, la verdad y la transparencia son esenciales en nuestra vida diaria. La honestidad fortalece la confianza, fomenta el aprendizaje y permite que la ciencia y la sociedad avancen con certeza. ¡Construyamos juntos un mundo basado en la verdad y el conocimiento!

Paso 3: Calculamos la pendiente de la recta en estos 2 puntos cercanos.

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$$m = \frac{1.21 - 1}{(1 + 0.1) - 1} = 2.1$$

Si probamos valores más pequeños de h, como $h = 0.001$ en otras palabras, si h tiende a cero. Y repetimos los pasos antes descritos tenemos que:

$$m = 2.001$$

La pendiente tiende al valor de 2, ese valor es el límite, cuando el valor de h tiende a cero.

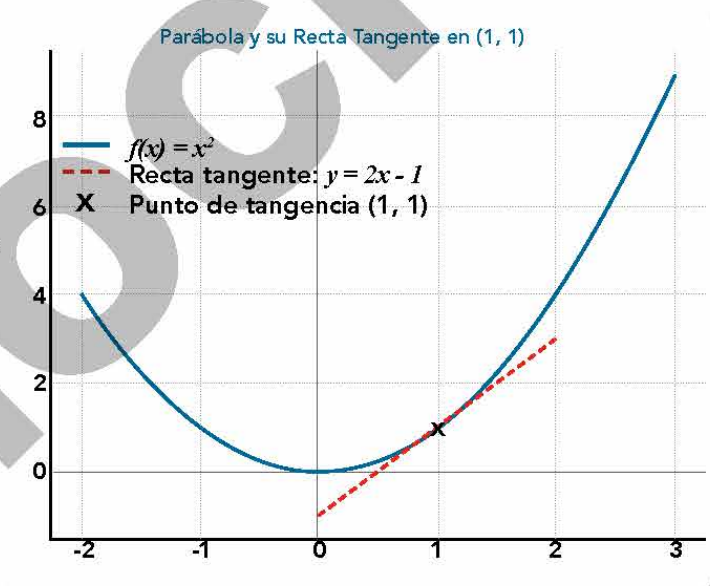
Paso 4: Determinar la ecuación de la recta tangente con pendiente igual a 2, para ello partimos de la forma de la ecuación de la recta punto y pendiente, usando la coordenadas A $(1,1)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1$$

Observa la gráfica de la función, en color azul, y la recta, en color rojo, que representa la tangente



¿SABÍAS QUÉ...?

¿Sabías que la recta tangente nos ayuda a entender cómo cambia el ritmo cardiaco?

En medicina, se usan ecuaciones diferenciales para analizar cómo varía la frecuencia cardiaca de un paciente en cada instante. Esto permite a los médicos prevenir riesgos cardíacos y mejorar.

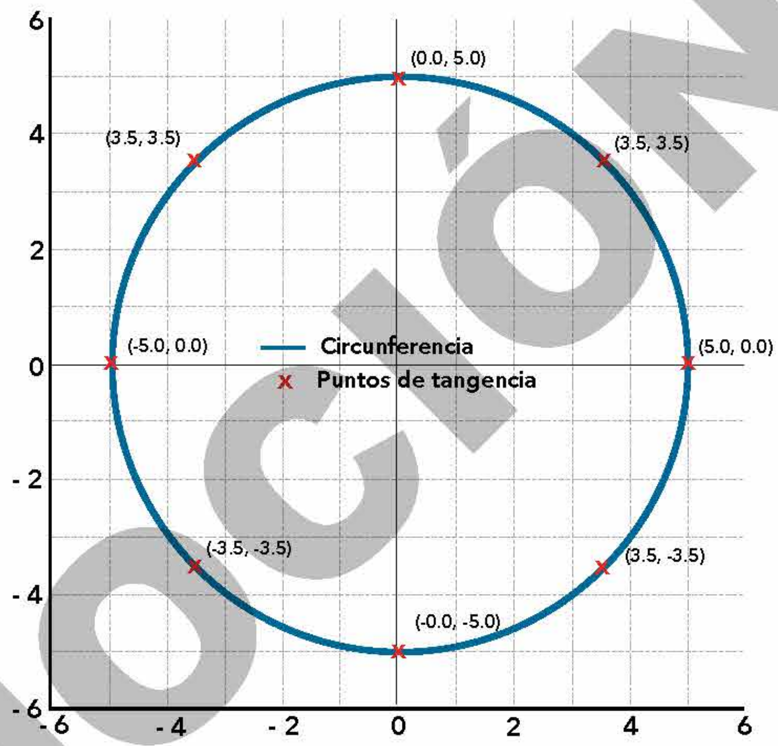
Trazo de rectas tangentes

ELABORAR

C. **Observa la circunferencia en la imagen y ubica los puntos marcados en rojo. Estos representan los puntos de tangencia.**

Usa una regla para trazar una recta tangente en cada punto rojo. Recuerda que la recta tangente solo debe tocar la circunferencia en un punto y no cruzarla.

Verifica que cada recta tangente es perpendicular al radio que une el centro de la circunferencia con el punto de tangencia.



D. **Encuentra la pendiente del segmento de recta que pasa por los puntos.**

A (1,3) y B (4,7) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-7}{1-4} = \frac{4}{3}$

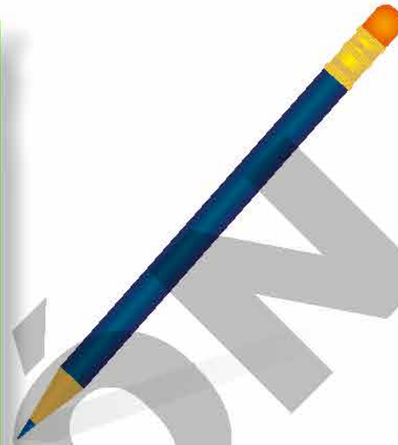
C (−2,5) y D (3,−1)

E (0,2) y F (5,10)

G (−4,−3) y H (2,6)

E. **Explica con tus palabras la diferencia entre una recta secante y una recta tangente.**

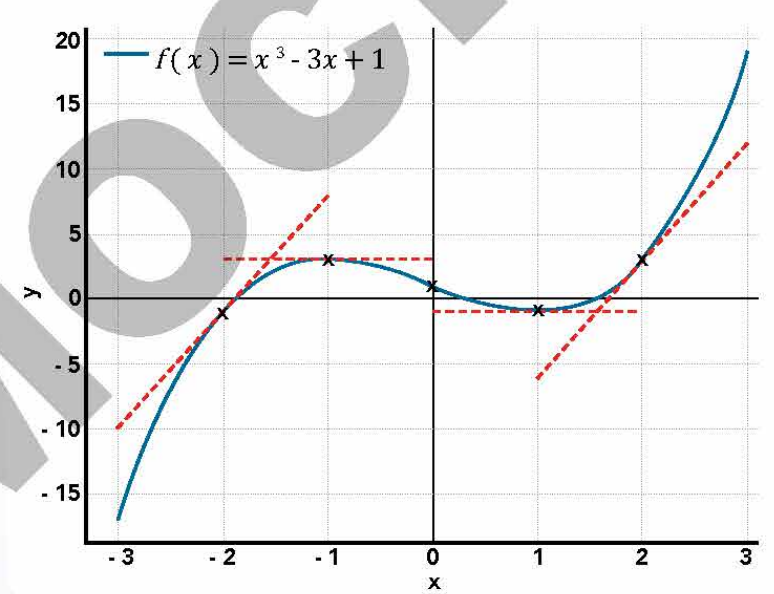
F. **Determina en tu cuaderno la pendiente de la recta tangente a la función mostrada en los siguientes puntos.**



$f(x) = x^2 - 4x + 3$	En el punto $x = 2$	$m = 0$
	En el punto $x = -1$	$m = -2$
	En el punto $x = 4$	$m = 0$
	En el punto $x = 1$	$m = 8/9$
	En el punto $x = 0$	$m = \frac{49\sqrt{17}}{68}$

G. La imagen muestra, la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$, en color azul, y algunos puntos de tangencia en $x = -2, -1, 0, 1$ y 2. Determina la pendiente de la tangente en cada punto de tangencia.

Explica que significa el valor de la pendiente, (mientras más alto es el valor, valor de cero, valores negativos, valor infinito).



H. **Dada la función, determinar la recta tangente en el punto mencionado.**

$f(x) = x^2 - 3x + 4$	En el punto $x = 2$	$y = x$
	En el punto $x = -1$	$y = 8x + 4$
	En el punto $x = 4$	$y = \frac{7}{8}x + 1$
	En el punto $x = 1$	$y = -5$
	En el punto $x = 0$	$y = \frac{1}{2}x + 1$

Velocidad instantánea

I. Realiza los cálculos en tu cuaderno y coloca aquí las respuestas.

Imagina que la altura de una pelota lanzada al aire sigue la función mostrada, donde $h(t)$ es la altura en metros y t es el tiempo en segundos:

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 10$$

1. Encuentra la pendiente de la recta tangente en $t = 2\ s$ para determinar su velocidad en ese instante.

Para t = 2 s

Encuentra la pendiente de la recta tangente en $t = 1\ s$ para determinar su velocidad en ese instante.

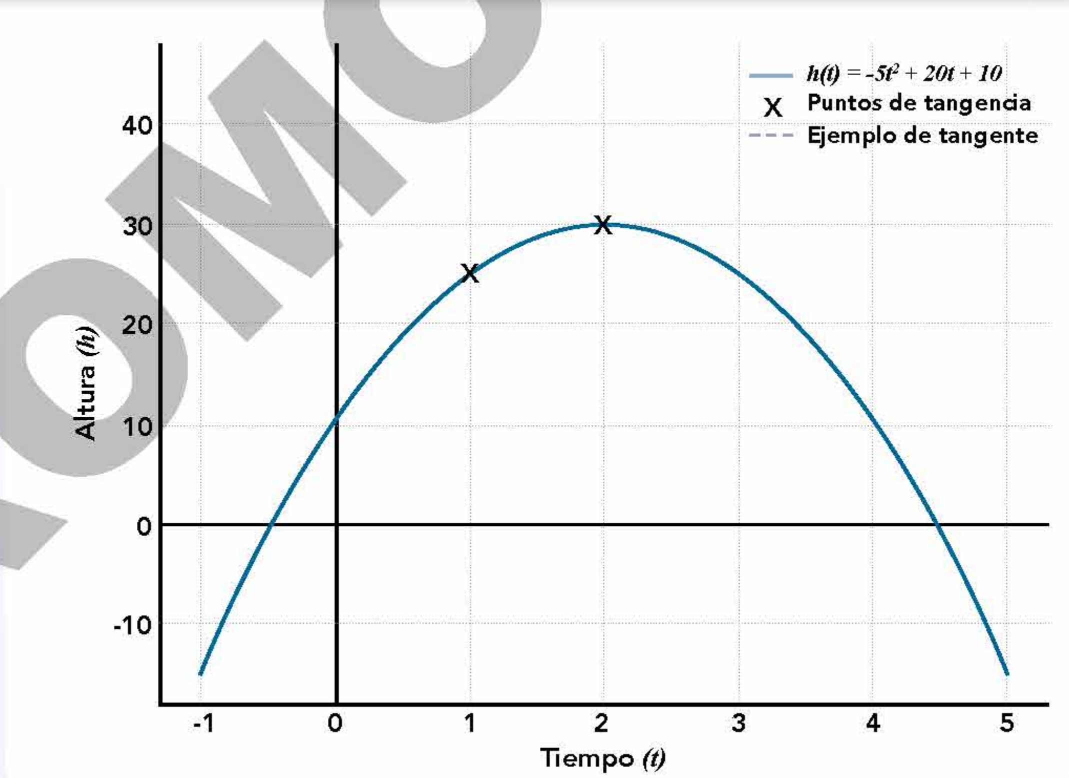
Para t = 1s

2. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes.

Para t = 2 s

Para t = 1s

Traza las rectas obtenidas sobre la gráfica.



3. ¿Cómo se interpreta físicamente ese valor de la pendiente en el movimiento de la pelota?

4. ¿Qué significa que la pendiente sea negativa en términos de la velocidad de la pelota?

5. ¿En qué intervalo de tiempo la pendiente es negativa? ¿Qué le está ocurriendo a la pelota en ese intervalo?

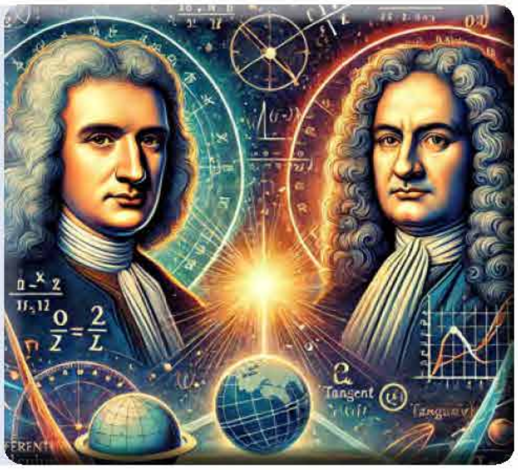
6. Si un objeto tiene pendiente positiva, ¿está aumentando o disminuyendo su altura?

7. Si la pendiente es negativa, ¿qué ocurre con la dirección del movimiento?

¿SABÍAS QUÉ...?

Durante el siglo XVII, Isaac Newton en Inglaterra y Gottfried Leibniz en Alemania desarrollaron de forma independiente el cálculo diferencial, lo que cambió para siempre la ciencia y la tecnología. A pesar de la rivalidad entre ambos, sus aportes han permitido avances en física, economía, biología y muchas otras áreas.

Este es un claro ejemplo de que el conocimiento no tiene fronteras y que las matemáticas son un lenguaje universal que une a las personas más allá de sus diferencias. Reflexiona: ¿Cómo crees que la colaboración entre culturas y países ha influido en los avances científicos.



4 PARTICIPACIÓN EN LA TRANSFORMACIÓN DE LA SOCIEDAD

El conocimiento se construye colectivamente y es producto de múltiples visiones y enfoques, sin importar el origen o contexto.

EVALUAR

META (CIERRE)

1. ¿Qué es una recta tangente?

a) Una línea que corta una curva en dos puntos distintos.
b) Una línea que toca una curva en un solo punto sin atravesarla.
c) Una línea que nunca toca la curva.
d) Una línea que siempre es horizontal.

2. ¿Cómo se llama la línea que corta a una curva en dos puntos?

a) Recta paralela
b) Recta perpendicular
c) Recta tangente
d) Recta secante

3. ¿Qué representa la pendiente de la recta tangente en un punto de una curva?

a) La inclinación de la curva en ese punto
b) El valor máximo de la función
c) La distancia entre dos puntos de la curva
d) El área bajo la curva

4. Si una recta tangente a una función tiene pendiente negativa en un punto, ¿qué indica esto sobre el comportamiento de la curva en ese punto?

a) La curva está aumentando.
b) La curva está en su punto más alto.
c) La curva está disminuyendo.
d) No se puede determinar.

5. Se tiene la función $f(x) = x^2 - 5x + 4$, ¿cuál es la ecuación de la recta tangente en $x = -1$?

a) $y = 3 - 7x$
b) $y = x - 4$
c) $y = x + 4$
d) $y = -x - 4$

6. Si $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, ¿cuál es la pendiente de la tangente en $x = 1$?

a) $m = 2$
b) $m = 1$
c) $m = 0$
d) $m = -1$

7. En el contexto de una rampa, si la pendiente de la recta tangente es 0, ¿qué indica esto?

a) La rampa está completamente horizontal en ese punto.
b) La rampa es muy inclinada.
c) La rampa está bajando.
d) No se puede determinar.

8. En términos del cálculo diferencial, ¿qué mide la pendiente de la recta tangente en un punto?

a) La tasa de cambio instantánea de la función en ese punto.
b) La distancia total recorrida por la función.
c) El área bajo la curva.
d) El tiempo que tarda en cambiar la función.

Aplicación de funciones reales y sus operaciones básicas

Progresión de aprendizaje

3

Equipaje de mano

Categorías C2, C3
Subcategorías S2
Metas M2

Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.

SALIDA
(INICIO)

ENGANCHAR

A. El cambio es una constante en la naturaleza y en nuestra vida cotidiana. Para iniciar, reflexiona sobre las siguientes situaciones.

1. ¿Alguna vez has notado cómo cambia la sombra de un árbol a lo largo del día? ¿Cómo podríamos describir ese cambio con números y gráficos?

2. Si un astronauta saltara en la Luna y en la Tierra, su salto alcanzaría alturas diferentes. ¿Cómo podríamos comparar esos movimientos utilizando funciones matemáticas?

3. Imagina que tienes una cuenta de ahorros con intereses. ¿Cómo cambia tu dinero con el tiempo si lo dejas sin tocar durante varios años? ¿Podrías modelar el cambio con matemáticas?

4. En una película de ciencia ficción, los personajes viajan a la velocidad de la luz. ¿Cómo podríamos modelar la relación entre la velocidad y el tiempo en estos viajes?

Exploración del conjunto de Mandelbrot:

TRAVESÍA
(DESARROLLO)

Funciones y realidades infinitas: las funciones matemáticas no solo sirven para modelar fenómenos físicos y económicos, sino que también pueden generar estructuras sorprendentes y visualmente complejas. Un ejemplo es el conjunto de Mandelbrot, una figura fractal que se crea a partir de funciones iterativas y que muestra cómo pequeños cambios en los valores iniciales pueden producir resultados drásticamente diferentes.

Este tipo de estructuras tiene aplicaciones en múltiples disciplinas, desde la física hasta el diseño de paisajes en videojuegos y efectos visuales en películas.

EXPLORAR

B. Escanea el código QR y explora diferentes regiones del conjunto de Mandelbrot.

- Observa cómo al hacer zoom aparecen patrones similares a escalas cada vez más pequeñas.
- Reflexiona sobre la idea de infinito y autoreplicación en esta estructura. ¿Qué nos dice esto sobre el concepto de infinito y autoreplicación en matemáticas?

EXPLICAR Funciones para modelar el cambio

El cambio es una de las nociones más relevantes en las matemáticas aplicadas y en otras disciplinas. Muchos fenómenos, desde el crecimiento de una población hasta las variaciones en la temperatura, pueden describirse o estudiarse a partir de cómo varía una determinada magnitud al modificar alguna variable, como el tiempo, la distancia o la concentración.

La modelación matemática consiste en traducir una situación o fenómeno real a una función matemática que permita describir, analizar y predecir comportamientos en diferentes ámbitos, por ejemplo:

- **Fenómenos físicos:** velocidad y aceleración en la cinemática (distancia en función del tiempo).
- **Fenómenos biológicos:** crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades.
- **Fenómenos económicos:** fluctuaciones de precios, tasas de interés, costos de producción.
- **Fenómenos sociales:** dinámica de redes sociales, evolución de tendencias.

A continuación, se describen los tipos más comunes de funciones que se emplean en el estudio del cambio.

Funciones lineales: Una función lineal se puede expresar como:

$$f(x) = mx + b$$

Donde m es la pendiente (o razón de cambio constante) y b es la ordenada al origen (el valor de la función cuando $x = 0$).

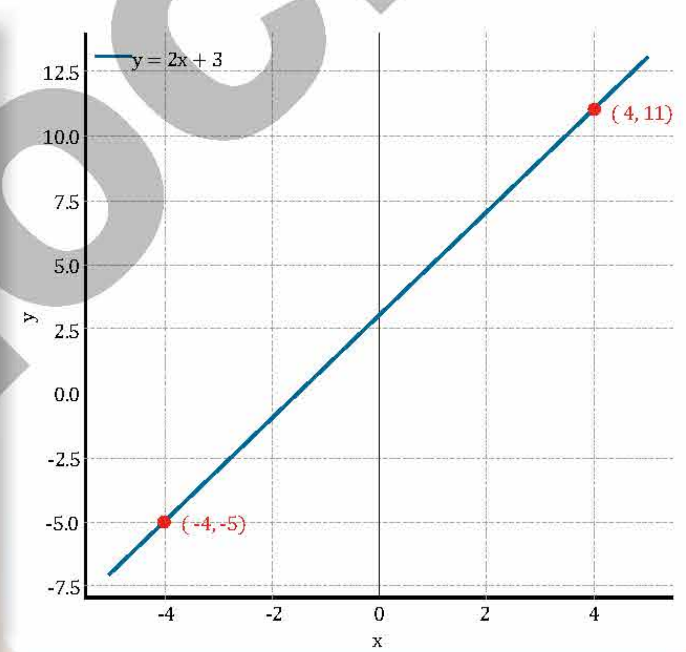
Principales características: Tienen crecimiento o decrecimiento constante (la pendiente m indica la tasa de cambio), su gráfica es una recta en el plano cartesiano.

Usos en la modelación: Costos de producción, movimientos con velocidad constante (distancia vs. tiempo), tasa de consumo de un recurso (por ejemplo, litros de agua por día).

Ejemplo 1: Traza la gráfica de la función lineal $f(x) = 2x + 3$

Solución: La función dada es una función lineal, ya que no contiene exponentes en la variable x. Para trazar su gráfica, utilizamos la tabulación de valores, es decir, calculamos puntos específicos sustituyendo valores en la ecuación.

Valor de x	Valor de $f(x)$
-4	$f(x) = 2x + 3$ $f(-4) = 2(-4) + 3$ $f(-4) = -8 + 3$ $f(-4) = -5$
Se obtiene la coordenada: (-4,-5)	
4	$f(x) = 2x + 3$ $f(4) = 2(4) + 3$ $f(4) = 8 + 3$ $f(4) = 11$
Se obtiene la coordenada: (4,11)	



Como se trata de una función lineal, con pendiente constante, con 2 coordenadas es suficiente para trazarla.

Funciones polinomiales (cuadráticas, cúbicas, etc.) Una función polinomial es aquella cuya expresión algebraica se compone de una suma de potencias de x con coeficientes reales.
De manera general, puede escribirse como:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Donde a_n es el coeficiente que multiplica a la variable x^n, además $a_n \neq 0$ y n es un entero.

En particular, una función cuadrática (polinomio de grado 2) se expresa como:

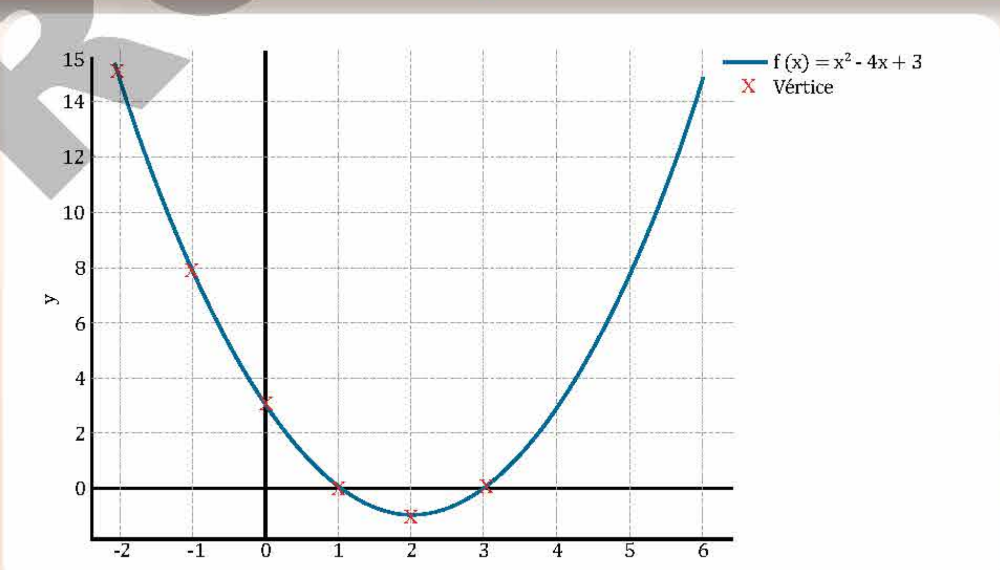
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Principales características (caso cuadrático): Su gráfica es una parábola, el término cuadrático (ax^2) determina la curvatura.
Usos en la modelación: Trayectorias de proyectiles en física (movimiento parabólico), optimización de áreas, volúmenes o costos, modelos de crecimiento o decaimiento.

Ejemplo 1: Traza la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x +$

Solución: La función dada es una función cuadrática, ya que contiene exponente cuadrático, en la variable x . Para trazar su gráfica, utilizamos la tabulación de valores, es decir, calculamos puntos específicos sustituyendo valores en la ecuación.

Valor de x	Valor de $f(x)$	Valor de x	Valor de $f(x)$
-2	$f(x) = x^2 - 4x + 3$ $f(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 3$ $f(-2) = 4 + 8 + 3$ $f(-2) = 15$	1	$f(x) = x^2 - 4x + 3$ $f(1) = (1)^2 - 4(1) + 3$ $f(1) = 1 - 4 + 3$ $f(1) = 0$
Se obtiene la coordenada: (-2, 15)		Se obtiene la coordenada: (1, 0)	
-1	$f(x) = x^2 - 4x + 3$ $f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 3$ $f(-1) = 1 + 4 + 3$ $f(-1) = 8$	2	$f(x) = x^2 - 4x + 3$ $f(2) = (2)^2 - 4(2) + 3$ $f(2) = 4 - 8 + 3$ $f(2) = -1$
Se obtiene la coordenada: (-1, 8)		Se obtiene la coordenada: (2, -1)	
0	$f(x) = x^2 - 4x + 3$ $f(0) = (0)^2 - 4(0) + 3$ $f(0) = 0 - 0 + 3$ $f(0) = 3$	3	$f(x) = x^2 - 4x + 3$ $f(3) = (3)^2 - 4(3) + 3$ $f(3) = 9 - 12 + 3$ $f(3) = 0$
Se obtiene la coordenada: (0, 3)		Se obtiene la coordenada: (3, 0)	



Funciones exponenciales: Una función exponencial se representa como

$$f(x) = a \cdot b^x$$

donde a y b son constantes.

Principales características: Muy sensibles a los pequeños cambios en x, pues la salida puede variar de forma drástica.

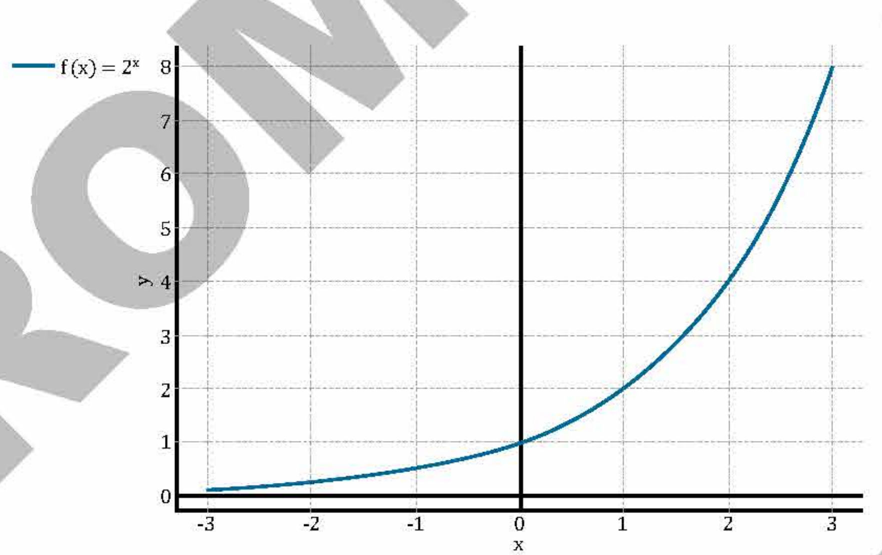
Usos en la modelación: Crecimiento poblacional (en un ambiente con recursos suficientes, sin restricciones), desintegración radiactiva en física y química (la cantidad de sustancia radioactiva decrece exponencialmente), procesos de enfriamiento o calentamiento (modelo de Newton del enfriamiento) interés compuesto en finanzas (el capital se incrementa exponencialmente).

Funciones logarítmicas Las funciones logarítmicas son las inversas de las funciones exponenciales y tienen la forma:

$$f(x) = log_b(x)$$

Principales características: Crecen de forma muy lenta a medida que x aumenta, útiles para describir fenómenos donde el crecimiento de la variable dependiente se ralentiza conforme x crece.

Usos en la modelación: Escalas logarítmicas (ej. escala Richter para sismos, decibelios en sonido, pH en química), transformación de datos en estadística, cuando los valores cubren varios órdenes de magnitud, modelos de aprendizaje donde al inicio se aprende mucho y luego el ritmo decrece.



A a la izquierda, función exponencial, $f(x) = 2^x$, a la derecha función logarítmica, $f(x) = ln(x)$

Operaciones básicas entre funciones

Para operar funciones se utilizan las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división) o composición (aplicar una función a los valores que arroja otra).

- **Suma de funciones**

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

Ejemplo:

Supongamos que $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 3$

Entonces, $(f+g)(x) = (2x+1)+(x^2-3) = x^2+2x-2$

- **Resta de funciones**

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

Ejemplo:
Con las mismas f y g anteriores

$$(f-g)(x) = (2x+1)-(x^2-3) = 2x+1-x^2+3 = -x^2+2x+4$$

- **Multiplicación de funciones**

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\,g(x)$$

Ejemplo:
Nuevamente, con $f(x) = 2x+1$ y $g(x) = x^2-3$

$$(f\cdot g)(x) = (2x+1)(x^2-3) = 2x\cdot x^2 + 1\cdot x^2 - 6x - 3 = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$$

- **División de funciones**

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo:
Siguiendo con $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 3$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x+1}{x^2-3}$$

4 PARTICIPACIÓN EN LA TRANSFORMACIÓN DE LA SOCIEDAD

El estudio de funciones y modelación matemática ayuda a los alumnos a interpretar fenómenos cotidianos, como el crecimiento de poblaciones o la propagación de enfermedades, mejorando su comprensión de las matemáticas y fomentando la resolución de problemas y la toma de decisiones informadas.

Composición de funciones

La composición de funciones es un proceso mediante el cual la salida de una función se emplea como entrada de otra. Se denota como $(f \circ g)(x)$ y se define de la siguiente manera:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo 1: Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2$

Entonces: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2(x^2) + 3 = 2x^2 + 3$

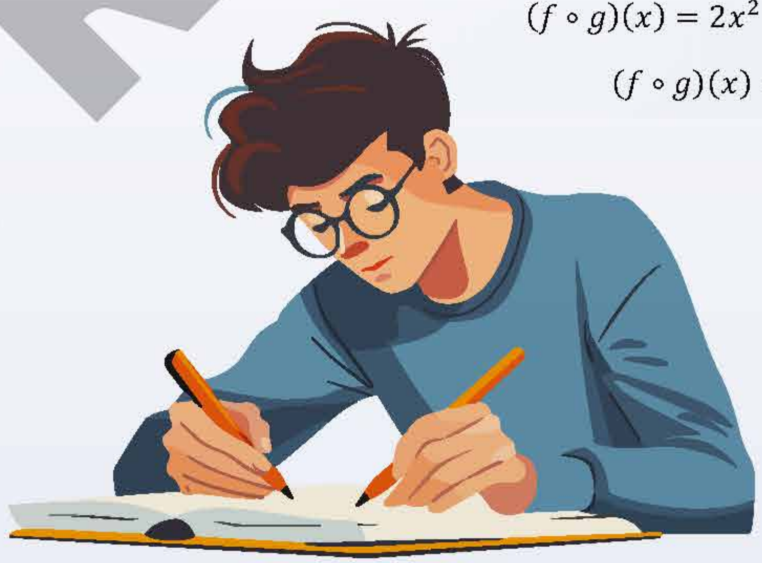
Ejemplo 2: Si $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ y $g(x) = x + 1$

Entonces: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = 2(x+1)^2 + 4(x+1) + 5$

$$(f \circ g)(x) = 2(x^2 + 2x + 1) + 4(x+1) + 5$$

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 4x + 2 + 4x + 4 + 5$$

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 8x + 11$$



C. Utiliza la tabulación de valores para obtener la gráfica de las siguientes funciones. Completa las siguientes tablas de valores para las funciones y selecciona a cuál de las gráficas de la siguiente página corresponde:

ELABORAR

1. $f(x) = 3x - 2$ ¿A qué gráfica corresponde?

x	-3	-1	0	1	3	5
$f(x)$						

2. $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ¿A qué gráfica corresponde?

x	-3	-1	0	1	3	5
$f(x)$						

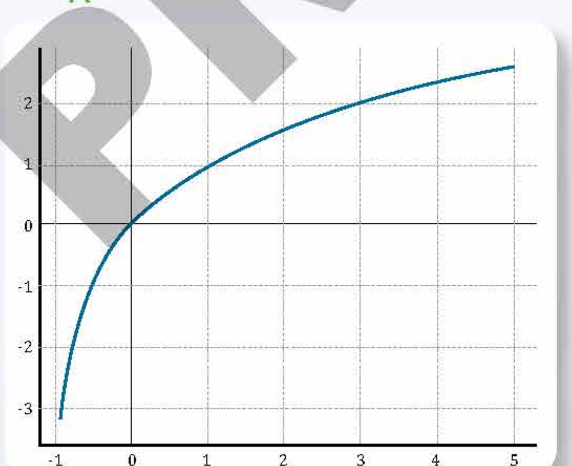
3. $f(x) = 2^x$ ¿A qué gráfica corresponde?

x	-3	-1	0	1	3	5
$f(x)$						

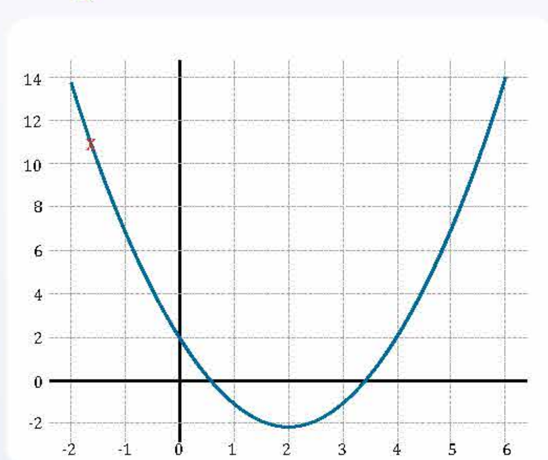
4. $f(x) = log_2(x+1)$ ¿A qué gráfica corresponde?

x	-3	-1	0	1	3	5
$f(x)$						

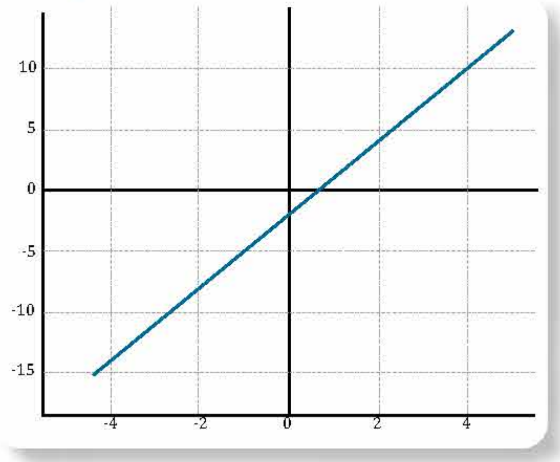
A



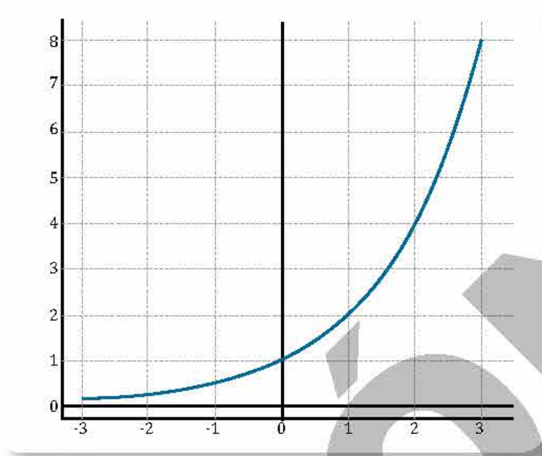
B



C



D



D. **Resuelve las siguientes operaciones con funciones en tu cuaderno y anota el resultado simplificado.**

Suma de funciones:

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 1$ encuentra $(f + g)(x)$

Si $f(x) = 4x - 2$ y $g(x) = 5x^2 + 3x$ encuentra $(f + g)(x)$

Si $f(x) = x^3 - 2x$ y $g(x) = 3x + 5$ encuentra $(f + g)(x)$

Si $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^2 - 2$ encuentra $(f + g)(x)$

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$ encuentra $(f + g)(x)$

Respuestas:

Resta de funciones:

Si $f(x) = 2x^2 - 4$ y $g(x) = x - 3$ encuentra $(f - g)(x)$

Si $f(x) = x^3 + x$ y $g(x) = 2x^2 - 1$ encuentra $(f - g)(x)$

Si $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = x^2 + 2$ encuentra $(f - g)(x)$

Si $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 2x - 3$ encuentra $(f - g)(x)$

Si $f(x) = log_2(x)$ y $g(x) = x^2 - 4$ encuentra $(f - g)(x)$

Respuestas:

Multiplicación de funciones:

Si $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2 - 1$ encuentra $(f \cdot g)(x)$

Si $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = 2x + 1$ encuentra $(f \cdot g)(x)$

Si $f(x) = sin\ sin\ x$ y $g(x) = cos\ cos\ x$ encuentra $(f \cdot g)(x)$

Si $f(x) = x - 4$ y $g(x) = e^x$ encuentra $(f \cdot g)(x)$

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x + 1}$ encuentra $(f \cdot g)(x)$

Respuestas:

División de funciones:

Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 1$ Encuentra $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Si $f(x) = 2x^3 - 5$ y $g(x) = x^2 + 1$ Encuentra $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Si $f(x) = ln\, ln\, x$ y $g(x) = x + 2$ Encuentra $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Si $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^2 - 1$ Encuentra $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Si $f(x) = x^4 + 2x^2$ y $g(x) = x^2 + 1$ Encuentra $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Respuestas:

Composición de funciones:

Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x - 3$ encuentra $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

Si $f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = x^3$ encuentra $(f \circ g)(x)$

Si $f(x) = \sqrt{x + 2}$ y $g(x) = x^2 - 1$ encuentra $(f \circ g)(x)$

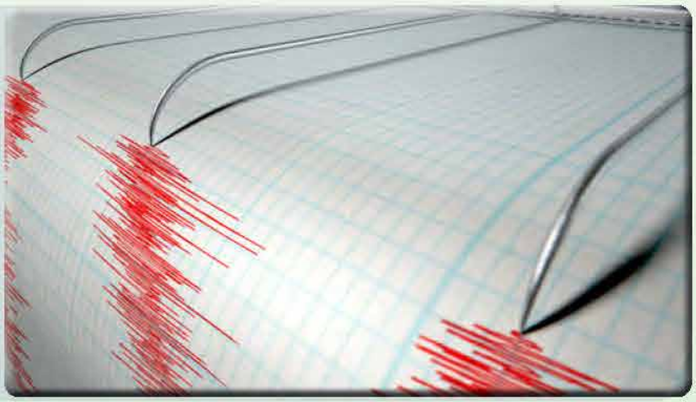
Si $f(x) = ln\, ln\, x$ y $g(x) = e^x$ encuentra $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ encuentra $(f \circ g)(x)$

Respuestas:

¿SABÍAS QUÉ...?

La escala de Richter es logarítmica, lo que significa que un aumento de un punto representa un terremoto 10 veces más intenso y 32 veces más energía. Un sismo que libera 1000 veces más energía puede diferir solo 2 unidades en la escala. Esto permite representar diversas intensidades con números pequeños.



EVALUAR

META
(CIERRE)

E. Resuelve en tu cuaderno los ejercicios de aplicación con funciones y anota las respuestas correspondientes.

1. Una ciudad tenía inicialmente 50 000 habitantes y su población crece según la función: $p(t) = 50\,000(1.02)^{t}$ Donde t es el número de años desde el inicio del estudio, determina:

A) ¿Cuál será la población después de 5 años?
B) ¿Cuánto tiempo tardará la población en alcanzar los 60 000 habitantes?
C) ¿La función que modela el crecimiento es lineal o exponencial?

a)	b)	c)

2. Un banco ofrece una cuenta de ahorros con un interés compuesto anual del 5%. Si una persona deposita \$10,000, la cantidad de dinero en la cuenta después de t años está dada por: $h(t)=10\,000(1.05)^{t}$ determina:

A) ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de 8 años?
B) ¿Cuánto tiempo tomará para que el dinero se duplique?
C) ¿Qué tipo de función describe este modelo financiero?

a)	b)	c)

F. Lee las siguientes preguntas y selecciona la respuesta correcta.

1. Si la altura de un objeto en caída libre sigue la ecuación $h(t)= -4.9t^2 + 100$, ¿qué tipo de función es?

a) Lineal b) Exponencial c) Cuadrática d) Logarítmica

2. Si una bacteria se reproduce duplicando su población cada 3 horas, ¿qué tipo de función la modela?

a) Lineal b) Exponencial c) Cuadrática d) Logarítmica

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa sobre una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$?

a) Su gráfica siempre es una parábola.
b) Puede tener 0, 1 o 2 intersecciones con el eje x.
c) Su pendiente es constante.
d) Puede tener un máximo o un mínimo dependiendo del signo de a.

4. Un taxi cobra una tarifa base de $35 más $8 por cada kilómetro recorrido, ¿Cuál es la ecuación que modela el costo total $C(x)$ en función de los kilómetros x recorridos?

a) $C(x) = 8x + 35$ b) $C(x) = 35x + 8$ c) $C(x) = 35 + 8^x$ d) $C(x) = 8x - 35$

5. Un café caliente a 85°C se deja enfriar en una habitación a 20°C. La temperatura del café sigue la ley de enfriamiento de Newton: $T(t) = 20 + 65e^{-0.07t}$ ¿Cuál será la temperatura del café después de 10 minutos?

a) $T(10) = 52.28°C$ b) $T(10) = 25.53°C$ c) $T(10) = 12.37°C$ d) $T(10) = 64.97°C$

6. Si la magnitud de un terremoto se mide con la ecuación $M = log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)$, ¿qué tipo de función se está utilizando?

a) Exponencial. b) Lineal. c) Cuadrática. d) Logarítmica.

7. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$, ¿cuál es el resultado de $(f \circ g)(x)$?

a) $x^2 + 1$ b) $x^2 - 1$ c) $2x + 1$ d) $x^3 + x$

8. Si $f(x) = 4x - 2$ y $g(x) = \frac{x}{2} + 1$, ¿cuál es el resultado de $(f \circ g)(x)$?

a) $12\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2$ b) $2x + 2$ c) $x + 4$ d) $4x + 3$

9. Si $f(x) = x^3 - 2$ y $g(x) = x + 4$, ¿cuál es el resultado de $(g - f)(x)$?

a) $-x^3 + x + 6$ b) $x^3 - 2x + 4$ c) $x^3 + 2x - 4$ d) $x^3 - 2x - 4$