Serie EXplora

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS II

J. Manuel Ruiz

BlueBooks & Magnus

NEM
MCCEMS

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS II

Dirección Editorial: **BB&M Academic**

Diseño Gráfico: **Jacobo González**

Diseño de Portada: **Montserrat Rosillo**

Maquetación: **Karen González**

Revisión Técnica: **Daniela Rodríguez**

Dirección de Producción: **Ricardo Cruz Flores**

Autor: **J. Manuel Ruiz**

Derechos de autor: **Bluebooks & Magnus S.A. de C.V.**

Edición: **Ileana Oropeza Rosas**

Imágenes: **Dreamstime**

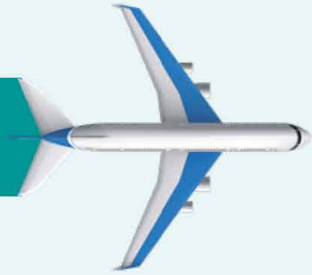
ISBN: **En trámite**

55 4957 0102

contacto@bluebooksandmagnus.com
www.**bluebooksandmagnus**.com
ventas@bluebooks.com.mx

1a edición
Impreso en México / Printed in México
Se terminó la impresión de esta obra en 2024
En los talleres de Fortaleza Gráfica S.A. de C.V.
Amado Nervo Mza. 11 Lte. 43, Col. Palmitas,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09670 Ciudad de México.

Contenido/Progresiones



Introducción

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS 2

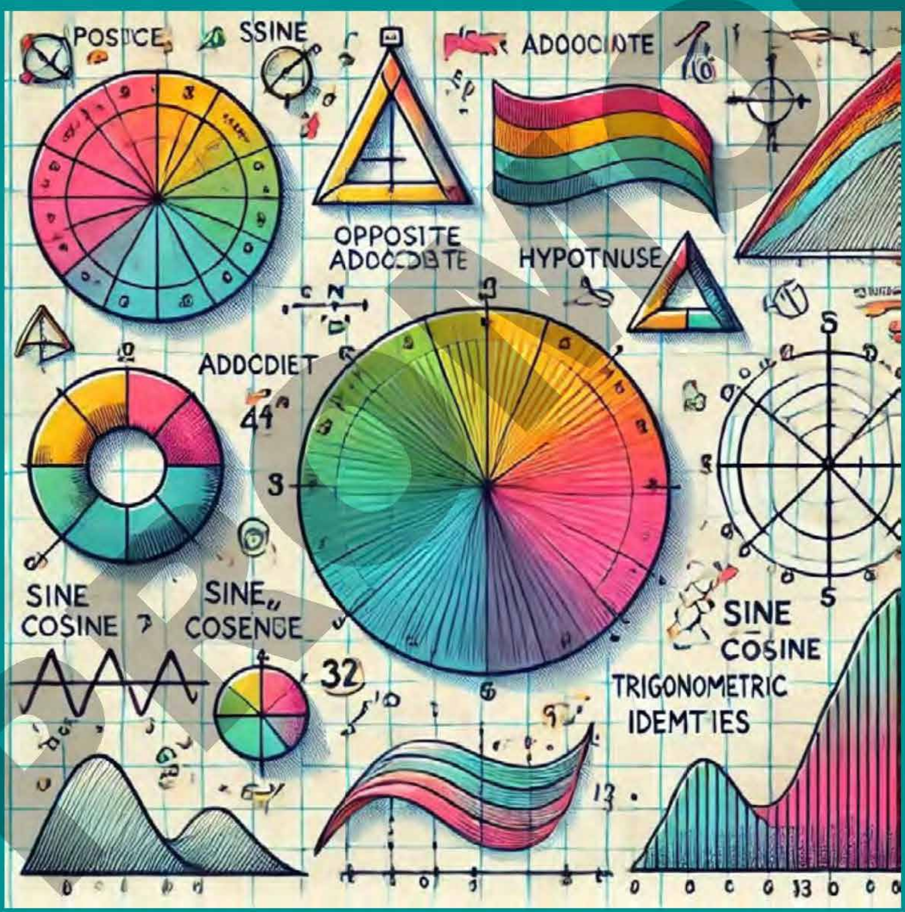
El objetivo de la Educación Media Superior es formar personas capaces de tomar decisiones para conducir su vida con bienestar y satisfacción; individuos capaces de erigirse como agentes de cambio, que fomenten una cultura de paz y de respeto, cuyo sentido de pertenencia social los impulse a participar de manera responsable y decidida en las mejoras o solución de situaciones o problemáticas de su entorno. Así mismo, se busca que desarrollen la capacidad de aprender a lo largo de su vida.

Temas selectos de matemáticas II concibe al recurso sociocognitivo de pensamiento matemático de manera amplia, ya que abarca los procedimientos de algoritmos, la interpretación de sus resultados y los procesos intuitivos y formales como la observación, el acto de conjeturar y la argumentación. Además, incluye la solución de problemas, la modelación de la realidad y la comunicación en contextos matemáticos. Las progresiones de aprendizaje tienen una orientación hacia la formación humana, así como la propedéutica para el ingreso a Educación Superior y/o para la inserción al mundo laboral.

En este libro se abordan contenidos tradicionales de geometría analítica desde una óptica novedosa; puesto que el estudiantado contará con experiencias de aprendizaje distintas a las tradicionales. Se han tomado en cuenta aspectos variacionales que aborden los conceptos, las propiedades y las relaciones clásicas de los objetos de estudio de la geometría analítica desde una perspectiva dinámica, a través de la consideración de los puntos de encuentro entre esta la geometría, la mecánica clásica, la astronomía y otras ciencias que abrevan de ella.

A lo largo de las progresiones de aprendizaje, se busca robustecer y profundizar lo que se trabajó en trigonometría en los primeros tres semestres, mediante progresiones de aprendizaje que apuntalan el estudio de propiedades e identidades trigonométricas en el contexto de resolución de problemas propios de la geometría analítica, por ejemplo, al considerar el movimiento circular, el estudio de rotaciones de cónicas o el uso de coordenadas polares.

En resumen, **Temas selectos de matemáticas II** explora la transversalidad de un curso tradicional de Geometría Analítica a través de espacios de reflexión e indagación acerca de algunas interrogantes que han cautivado a la humanidad, a la par que robustece y consolida el pensamiento matemático que el estudiantado ha estado desarrollando desde los primeros semestres.



8 Principios de la Nueva Escuela Mexicana

NEM
MCCEMS

Fortalecer el amor a la patria, el aprecio de la cultura, historia y valores de nuestro país, respetando la diversidad cultural y de pensamiento.

Impulsar el uso de valores y de los derechos humanos en pro del desarrollo del individuo y de la comunidad.

Enfatizar este valor para desarrollar la confianza y la congruencia dentro de la comunidad.

Trabajar de manera conjunta con los miembros de la comunidad y no solo de manera individual para la resolución de problemas comunes.

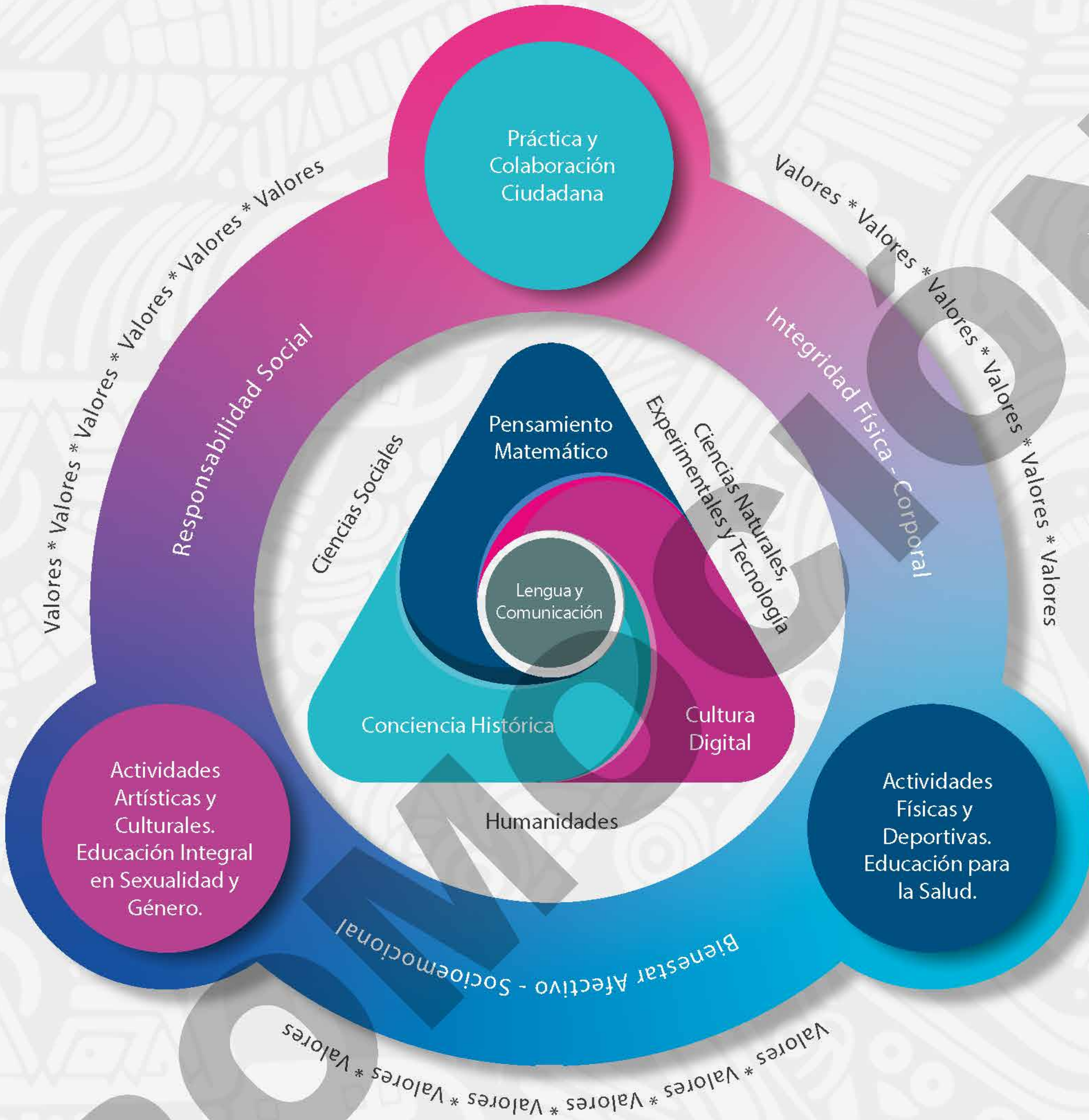
Respetar, ejercer y promover los derechos humanos.

Fomentar el reconocimiento, respeto y aprecio por la diversidad cultural y lingüística que existe en nuestro país.

Favorecer la resolución de conflictos mediante el diálogo constructivo que deriven en acuerdos y no a través de la violencia. Promover la solidaridad y la búsqueda de una sociedad pacífica con desarrollo sostenible, inclusiva y con igualdad de oportunidades.

Incentivar la conciencia, el conocimiento, la protección y conservación del entorno.

Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS)



Currículum Fundamental

Recursos Sociocognitivos:

- Lengua y comunicación
- Pensamiento matemático
- Conciencia histórica
- Cultura digital

Áreas de Conocimiento:

- Ciencias naturales, experimentales y tecnología
- Ciencias sociales
- Humanidades

Currículum Ampliado

Recursos Socioemocionales

- Responsabilidad social
- Cuidado físico corporal
- Bienestar emocional afectivo

Ámbitos de la Formación Socioemocional

- Práctica y colaboración ciudadana
- Educación integral en sexualidad y género
- Actividades físicas y deportivas
- Actividades artísticas y culturales
- Educación para la salud

Categorías, subcategorías, conceptos centrales y transversales

Metas de aprendizaje

Aprendizajes de trayectoria – Perfil de ingreso y egreso

Serie EXplora

¡Bienvenidos a bordo a nuestra experiencia de aprendizaje!

En esta emocionante travesía, hemos diseñado una secuencia didáctica que equipara el proceso de enseñanza-aprendizaje con un viaje inolvidable. Al igual que en cualquier paseo, nuestro recorrido educativo consta de tres momentos fundamentales:

La fase de inicio "ABORDAJE"

La fase de desarrollo "TRAYECTORIA"

La fase de cierre "ATERRIZAJE"

MOMENTO 1

ABORDAJE (INICIO)

Es la sección en la que nos alistamos para comenzar nuestro viaje educativo. Identificamos la progresión y comprendemos sus componentes.

Equipaje de mano

- Metas
- Categorías
- Subcategorías

Las 5E representan cinco fases clave en el proceso de aprendizaje.

Enganchar

Activa tus conocimientos con las preguntas detonadoras, imágenes, videos o lecturas que tu libro te ofrece, te brindarán la oportunidad de comprender de una manera única los temas y actividades que vas a realizar.

NEM

MCCEMS

8 Principios de la Nueva Escuela Mexicana

BlueBooks & Magnus

PASAPORTE DEL APRENDIZAJE

MOMENTO 2 TRAYECTORIA (DESARROLLO)

Aquí nos profundizamos en el corazón de la enseñanza y el aprendizaje. Esta fase es el núcleo de nuestro recorrido educativo, donde exploramos conceptos, practicamos habilidades y nos sumergimos en el conocimiento.

Explorar

Mediante diversas actividades, cuestionamientos, experimentos, observaciones e investigaciones, tendrás la oportunidad de participar activamente en las situaciones que están diseñadas para tu aprendizaje.

Explicar

Presta atención a las bases teóricas que te serán proporcionadas, así podrás identificar con mayor facilidad la información relevante y los conceptos clave de los contenidos de las progresiones.

Elaborar

Aplica tus conocimientos y habilidades adquiridas elaborando diversos instrumentos y actividades, los cuales te permitirán profundizar y comprender mejor los temas que se abordarán.

MOMENTO 3 ATERRIZAJE (CIERRE)

Es el momento de finalizar nuestro paseo educativo y asegurarnos de que todos los aprendizajes se consoliden. Aquí reflexionamos sobre lo aprendido, evaluamos nuestro progreso y nos preparamos para futuras aventuras educativas.

Evaluar

El momento de poner aprueba tus conocimientos ha llegado, involúcrate activamente en el proceso de evaluación, apoyándote de los instrumentos que se encuentran al final de cada progresión y demuestra lo aprendido.

Recursos Educativos

- ¿SABÍAS QUÉ?...
- MOMENTO DE REFLEXIÓN
- TEMA INTEGRADOR
- TRANSVERSALIDAD

Recursos Socioemocionales

- CUIDADO FÍSICO CORPORAL
- BIENESTAR EMOCIONAL AFECTIVO
- RESPONSABILIDAD SOCIAL

Ámbitos de la Formación Socioemocional

- PRÁCTICA Y COLABORACIÓN CIUDADANA
- EDUCACIÓN INTEGRAL EN SEXUALIDAD Y GÉNERO
- ACTIVIDADES FÍSICAS Y DEPORTIVAS
- ACTIVIDADES ARTÍSTICAS Y CULTURALES
- EDUCACIÓN PARA LA SALUD

Unidad 1

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Progresión 1 Objetos en Movimiento

Intuye la trayectoria de objetos que se mueven en dos dimensiones y las describe heurísticamente a través del uso de sistemas coordenados cartesianos. De ser posible empleando software como Tracker y GeoGebra que le permita rastrear el movimiento de dichos objetos.

Progresión 2 Describiendo Trayectorias

Describe algebraicamente algunas trayectorias, lugares geométricos o regiones en el plano empleando ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas o relaciones de distancia y ángulo entre puntos y rectas del plano cartesiano

Progresión 3 Curvas Planas

Deduce propiedades geométricas (simetría, extensión, etc.) de curvas planas, a partir de sus expresiones algebraicas, considerando que polinomios de dos variables con coeficientes reales tienen un conjunto solución que puede graficarse en el plano cartesiano.

Progresión 4 Recta en el Origen

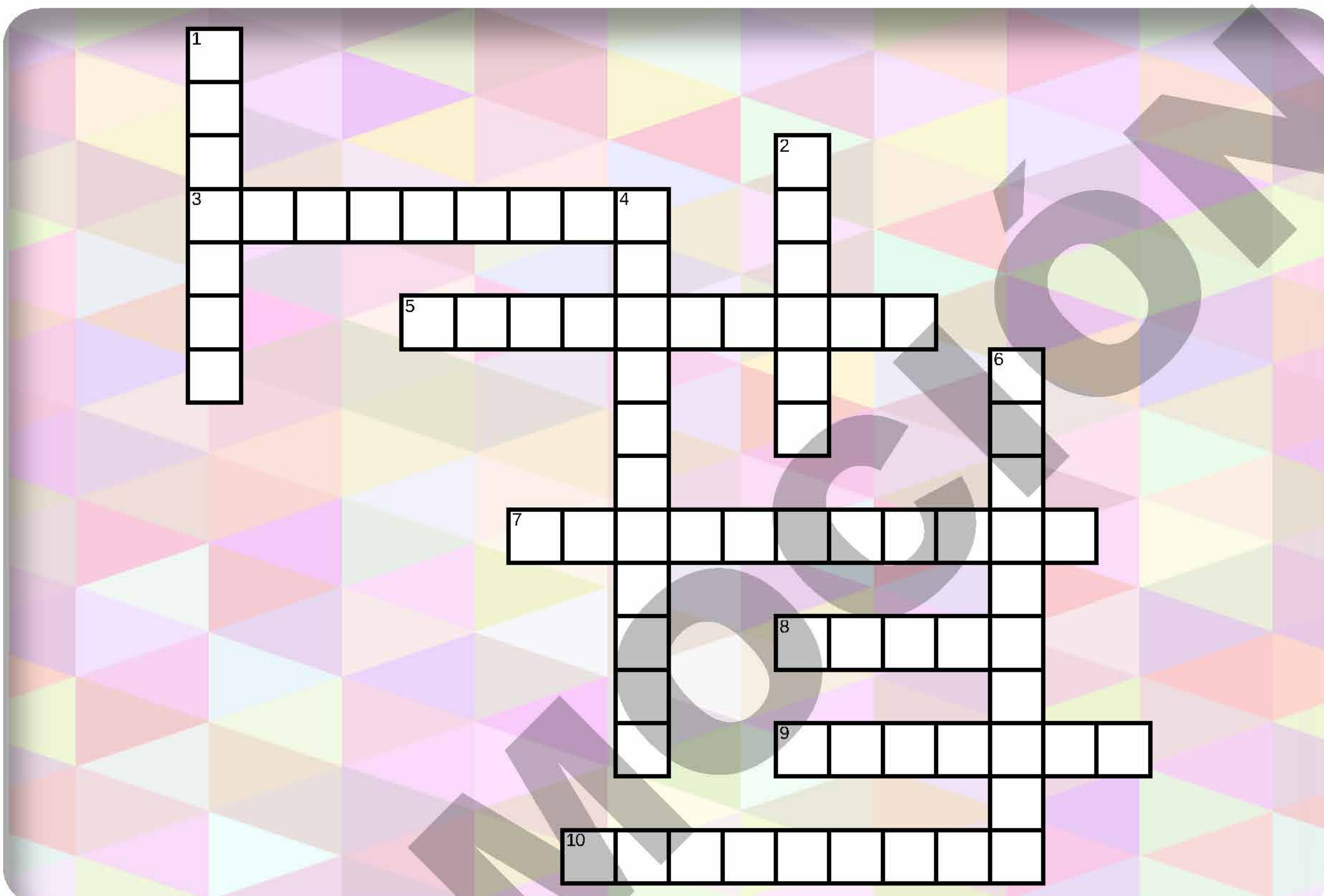
Emplea métodos gráficos para entender el comportamiento de dos variables que estén en relación de proporcionalidad directa para deducir la ecuación de la recta que pasa por el origen y posteriormente trabajar el caso general de una recta en el plano.

Equipaje de mano

Metas	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **(P2)**	**C1.** Procedural. **(P2, P3)**	**S1.** Elementos aritméticoalgebraicos **(P3)**
C1M2. Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **(P3)**	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento. **(P1, P3)**	**S2.** Elementos geométricos **(P2, P3)**
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo**(P3)**	**C3.** Solución de problemas y modelación. **(P2, P4)**	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar **(P1, P3)**
C2M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación. **(P1)**	**C4.** Interacción y lenguaje matemático **(P3)**	**S2.** Pensamiento intuitivo **(P3)**
C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. **(P2)**		**S2.** Construcción de modelos. **(P2)**
C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno. **(P4)**		**S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios **(P4)**
C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural. **(P3)**		**S1.** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. **(P3)**
		S3. Ambiente matemático de comunicación **(P3)**

Evaluación diagnóstica

A. **En parejas o pequeños grupos, respondan el siguiente crucigrama. Algunos términos les resultaran familiares otros, no.**



Horizontales

3. Figura geométrica formada por tres rectasque se cortan de dos en dos y que formanentre sí tres ángulos.

5. Lado de mayor tamaño en un triángulorectángulo.

7. Figuras geométricas que tienen la mismaforma e igual tamaño.

8. Elemento que surge de la unión de dospuntos.

9. Lados de un triángulo que forman un ángulorecto.

10. Filósofo y matemático griego que formulóprincipios que contribuyeron al desarrollo delas matemáticas, geometría y atritmética.

Verticales

1. Punto en el que concurren dos lados de unángulo.

2. Figura geométrica formada por dos líneasplanas que concurren en un punto.

4. Triángulo que tiene dos ángulos agudos yuno mayor a 90 °.

6. Figuras geométricas que tienen la mismaforma pero diferente tamaño.

Progresión de aprendizaje 1

Objetos en Movimiento

Equipaje de mano

Metas
CM2
Categorías
C2
Subcategorías
S1

5E Enganchar

ABORDAJE (INICIO)

A. Reúnete con un compañero y discutan las siguientes preguntas.

- Si no tuviéramos relojes ni calendarios, ¿cómo podríamos organizar nuestras actividades diarias?
- ¿Cómo sabemos que pasa el tiempo?
- ¿Cómo crees que las personas en la antigüedad medían el tiempo sin la tecnología actual?

Medición del tiempo, ¿cómo sabemos que pasa?

Desde hace siglos dividimos el tiempo en días. De hecho, la palabra día, deriva de una raíz indoeuropea que denota la acción de dividir o dualidad. Si bien la primera forma de dividir el día fue en sus periodos de luz (día) y oscuridad (noche), de igual forma, al día lo dividimos en horas. Sin embargo, durante la mayor parte de los siglos en que dividimos al día en horas, las horas fueron más largas en verano y más cortas en invierno.

Si dividimos un día en 24 horas y asignamos 12 horas para la noche y 12 para el día, las 12 horas del día marcan el tiempo transcurrido entre el amanecer y el ocaso. En este entendido, dado que (dicho actualmente) en verano pasa más tiempo entre el amanecer y el ocaso que en invierno, las horas en verano son mas largas que en invierno.

En la antigüedad ya había relojes de sol, de arena y de agua, pero no desempeñaban el papel que tienen actualmente los relojes en la organización de nuestra vida.

Hoy en día, podemos reconocer con facilidad y precisión el paso del tiempo gracias a los relojes, pero sin ellos, ¿cómo podrías reconocer o cuantificar que el tiempo pasa?

MOMENTO DE REFLEXIÓN

B. Mira el siguiente video y comenta con tus compañeros ¿Qué tienen en común todos los relojes que han existido desde la antigüedad?

TRAYECTORIA (DESARROLLO)

Actividad de aprendizaje

Explorar

5E

B. Formen equipos de tres personas y con ayuda de un celular, capturen en video un objeto inanimado en movimiento, procurando tener un marco de referencia para saber cuánto y cómo se desplaza. Puede ser un objeto lanzado en el aire, desplazándose sobre una superficie plana, o un objeto girando sobre su eje (en este caso, marquen un punto sobre el perímetro del objeto para que puedan seguir con detalle el movimiento del objeto).

1. Describan cualitativamente el movimiento del objeto:

2. Elaboren una gráfica que represente el movimiento del objeto. Ilústrala en el cuadro.

Objetos en movimiento

Como probablemente ya has llegado a deducir, un parámetro para describir y cuantificar el cambio en un objeto es el tiempo. Desde los relojes más primitivos, hasta los más modernos, el cambio de posición sea el Sol, el agua o la arena en un recipiente, la combustión de la cera de una vela, o el girar de las manecillas de un reloj, está intrínsecamente relacionado con el transcurrir del tiempo.

Usamos el tiempo como parámetro para describir el cambio o movimiento de los objetos.

La Trayectoria

La **trayectoria** de un objeto es el camino que sigue en su **movimiento a lo largo del tiempo**. Dependiendo de las dimensiones en las que ocurre el movimiento, podemos clasificarla como **lineal, planar o espacial**.

1. **Trayectoria Lineal:** movimiento en una sola dimensión (línea recta).

Ocurre cuando un objeto se mueve en una sola dimensión, es decir, a lo largo de una línea recta. Puede ser horizontal, vertical o inclinada, pero siempre sin desviaciones. Ejemplo: Un objeto cayendo libremente bajo la acción de la gravedad (movimiento rectilíneo vertical).

2. **Trayectoria Planar:** movimiento en dos dimensiones (trayectoria dentro de un plano).

Es el movimiento que ocurre en dos dimensiones, es decir, en un plano X, Y. La trayectoria puede ser rectilínea (si el movimiento es en línea recta en el plano) o curvilínea (si cambia de dirección dentro del plano). Ejemplo: Un objeto lanzado con un ángulo (trayectoria parabólica en un plano).

3. **Trayectoria Espacial:** movimiento en tres dimensiones (trayectoria en el espacio).

Es aquella que se desarrolla en tres dimensiones, es decir, en el espacio **X, Y, Z**. En este caso, la trayectoria no se restringe a un solo plano, también posee profundidad y puede tomar formas más complejas. Ejemplo: La trayectoria de un planeta alrededor del Sol, que sigue una órbita elíptica a la vez que se desplaza en el espacio.

Ecuaciones paramétricas

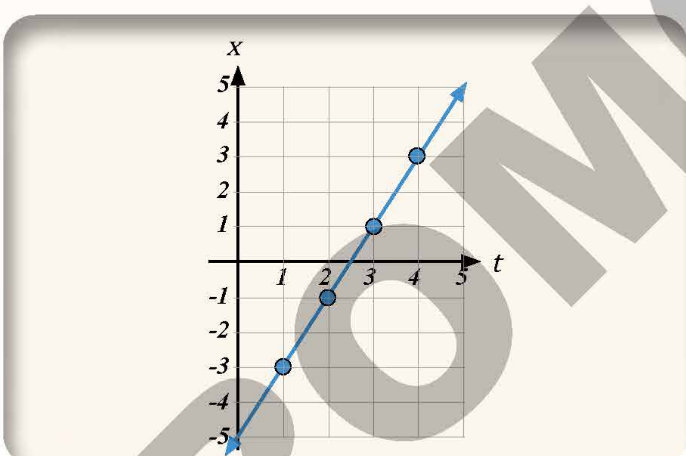
Las ecuaciones que involucran una tercera variable (parámetro) de la cual dependen las otras, se llaman **ecuaciones paramétricas**. En un sistema de coordenadas bidimensional, las ecuaciones paramétricas son útiles para describir curvas que no son necesariamente funciones. Una ecuación paramétrica permite describir una **trayectoria** en función de un parámetro. El parámetro es una variable independiente de la que dependen tanto x como y, y a medida que el parámetro aumenta, los valores de x y y trazan una trayectoria a lo largo de una curva plana. Por ejemplo, si el parámetro es t , entonces t podría representar el tiempo. Entonces x y y se definen como ***funciones*** del ***tiempo***, y $(x(t),y(t))$ puede describir la posición en el plano de un objeto determinado mientras se mueve a lo largo de una trayectoria curva.

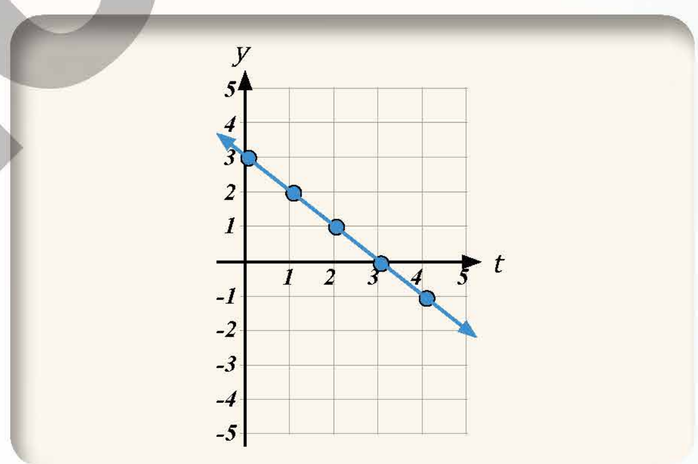
La trayectoria de un objeto que se mueve en dos dimensiones depende de las fuerzas que actúan sobre él y de sus condiciones iniciales de movimiento. Podemos clasificar estas trayectorias en distintos tipos según su naturaleza:

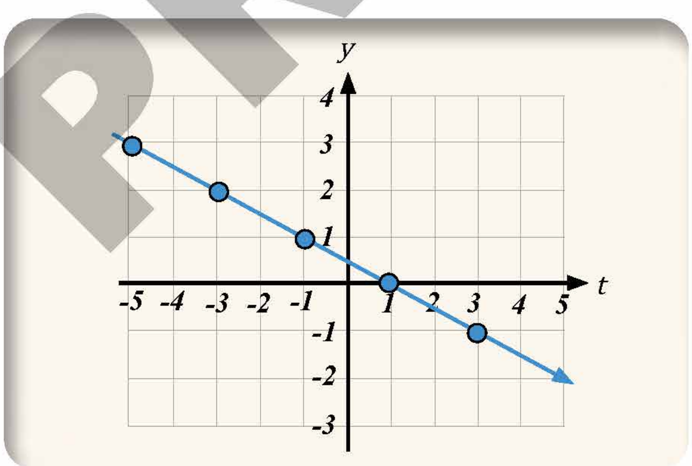
1. Movimiento rectilíneo

Si un objeto se mueve con velocidad constante y sin aceleración (o con aceleración constante en la misma dirección de la velocidad), su trayectoria será una **línea recta**. Esto ocurre, por ejemplo, en un movimiento sin fricción o cuando un proyectil se mueve en el espacio sin la influencia de la gravedad.

Podemos construir una tabla de valores x y y, usando t como parámetro. A partir de esta tabla, podríamos crear tres posibles gráficas: A) una gráfica de x vs. t que mostraría la posición horizontal a lo largo del tiempo, B) una gráfica de y vs. t que mostraría la posición vertical a lo largo del tiempo, o C) una gráfica de y vs. x mostrando la posición del objeto en el plano.







5E Elaborar

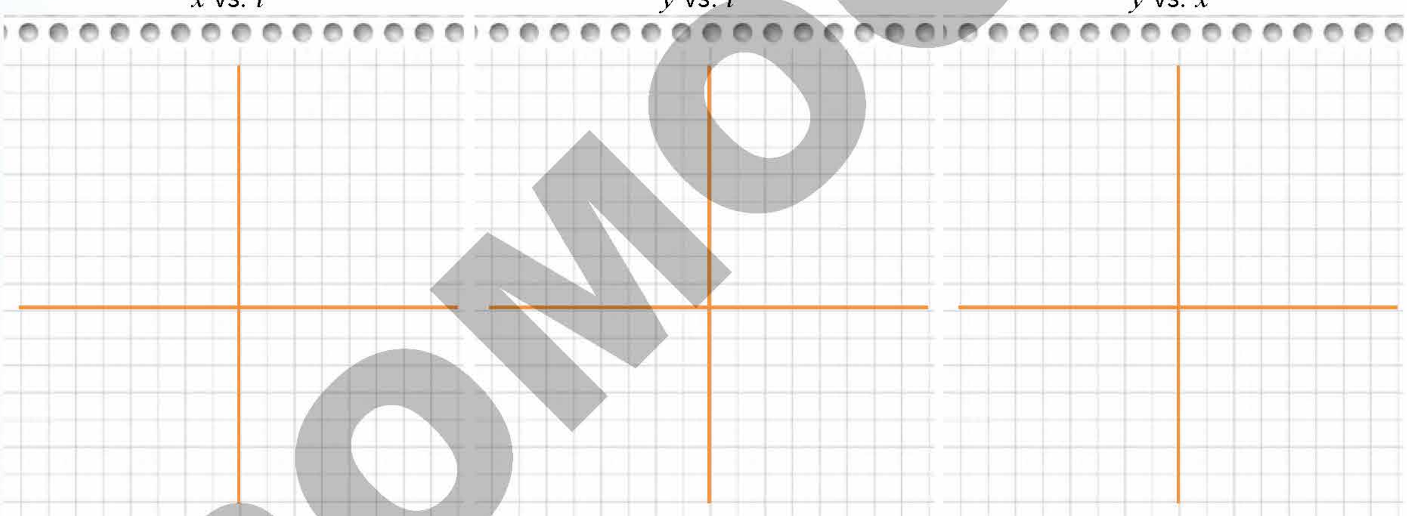
Actividad de aprendizaje

C. Escaneen el QR y vean el siguiente video. Reproduzcan el ejercicio a partir de los videos obtenidos en la actividad C. Comenten sus resultados en clase.

Para realizar la actividad será necesario descargar el programa Tracker. Es un software gratuito de análisis de video. Puedes descargarlo en el siguiente enlace:

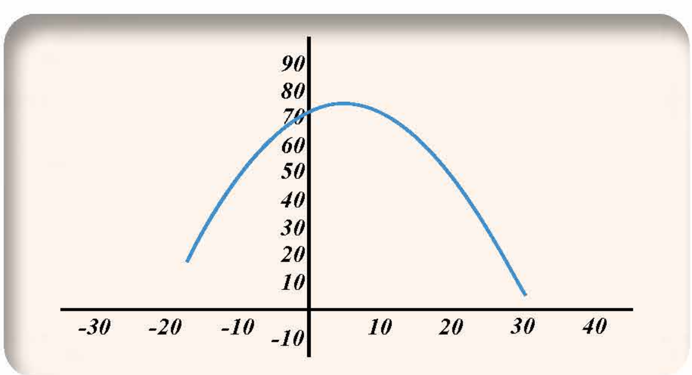
Dibuja las gráficas obtenidas para:

x vs. t | y vs. t | y vs. x



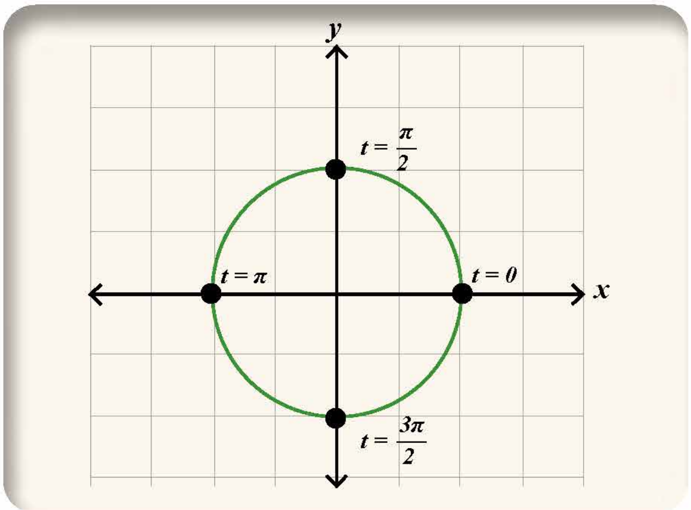
2. Movimiento parabólico

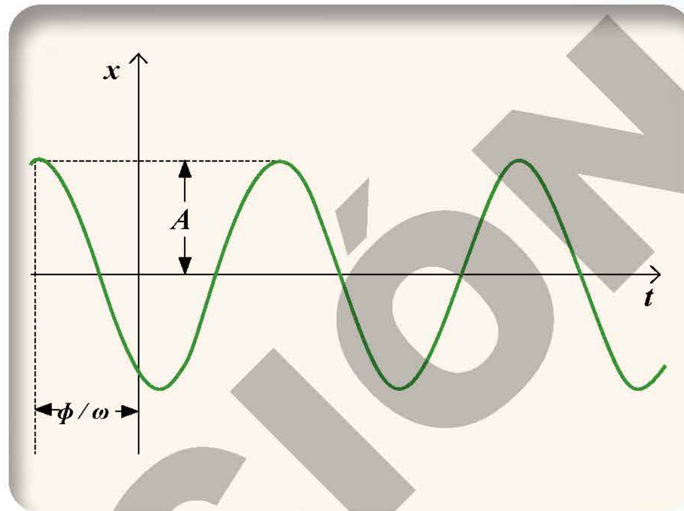
Cuando un objeto es lanzado con una velocidad inicial en dirección oblicua bajo la influencia de la gravedad (como en el tiro parabólico), su trayectoria será una **parábola**. Esto se debe a que en la dirección horizontal el movimiento es uniforme, mientras que en la vertical hay una aceleración constante hacia abajo debido a la gravedad.



3. Movimiento circular

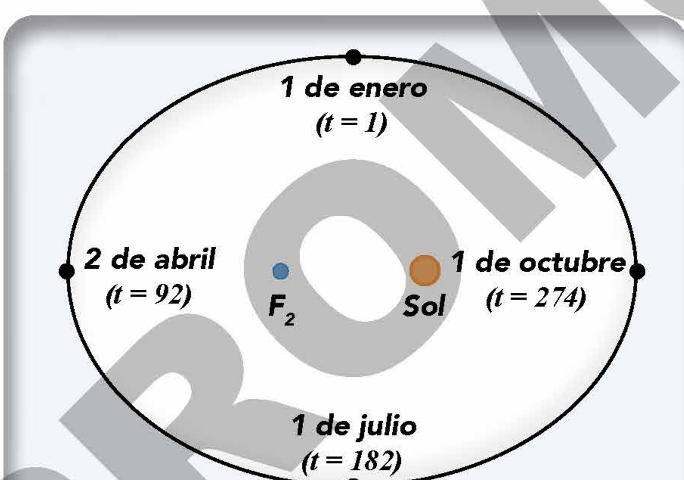
Si un objeto experimenta una aceleración perpendicular a su velocidad (como en el caso de un cuerpo atado a una cuerda girando alrededor de un punto), la trayectoria será un círculo. Aquí, la aceleración centrípeta mantiene al objeto en un camino curvo, redirigiendo su velocidad de manera constante.





4. Movimiento elíptico

Cuando un objeto se mueve bajo la influencia de una fuerza central (como un planeta alrededor del Sol), su trayectoria sigue una elipse. Evidencia de esto son las leyes de Kepler, los cuerpos en órbita siguen trayectorias elípticas con el centro de fuerza en uno de sus focos.



5. Movimiento caótico o complejo

Si un objeto experimenta fuerzas variables en distintas direcciones (por ejemplo, una hoja arrastrada por el viento o el movimiento de una partícula en un fluido turbulento), su trayectoria puede ser **irregular o caótica**, sin una forma definida fácilmente predecible.

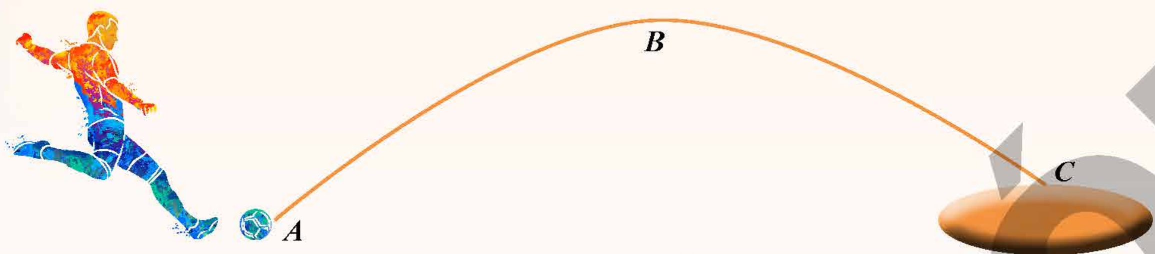
En términos generales, la trayectoria de un objeto en dos dimensiones puede determinarse analizando sus componentes de movimiento independientes (horizontal y vertical), identificando las fuerzas que actúan sobre él y observando cómo su posición cambia en función del tiempo.

Actividad de aprendizaje

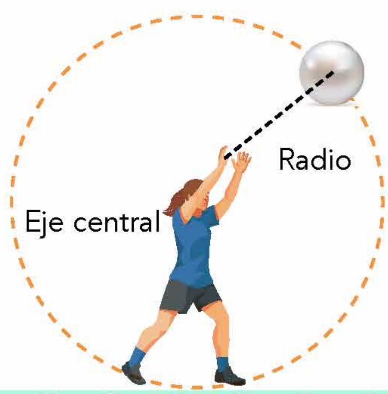
Elaborar

D. Sigue las instrucciones en los ejercicios.

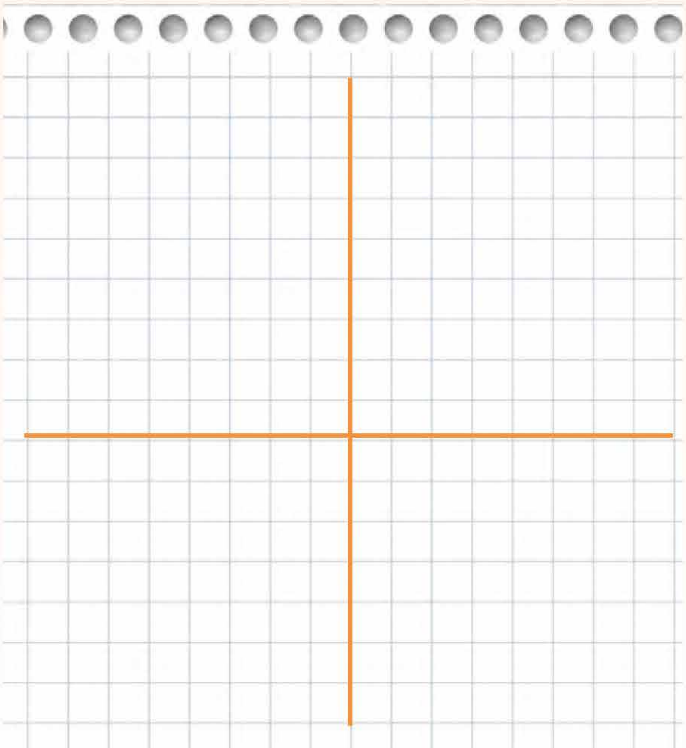
1. Describe cualitativamente el movimiento del balón:



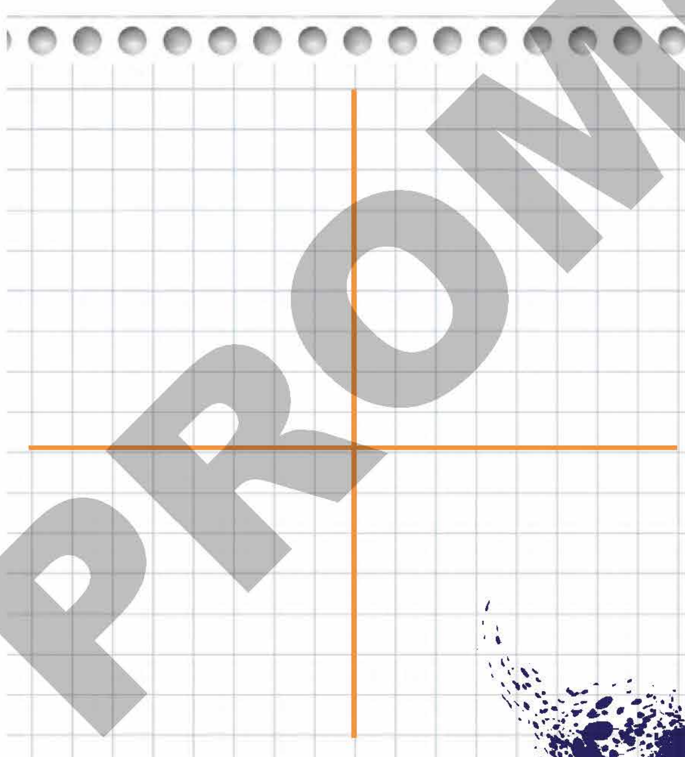
2. Describe cualitativamente el movimiento de la pelota y su posición en cualquier momento dado.

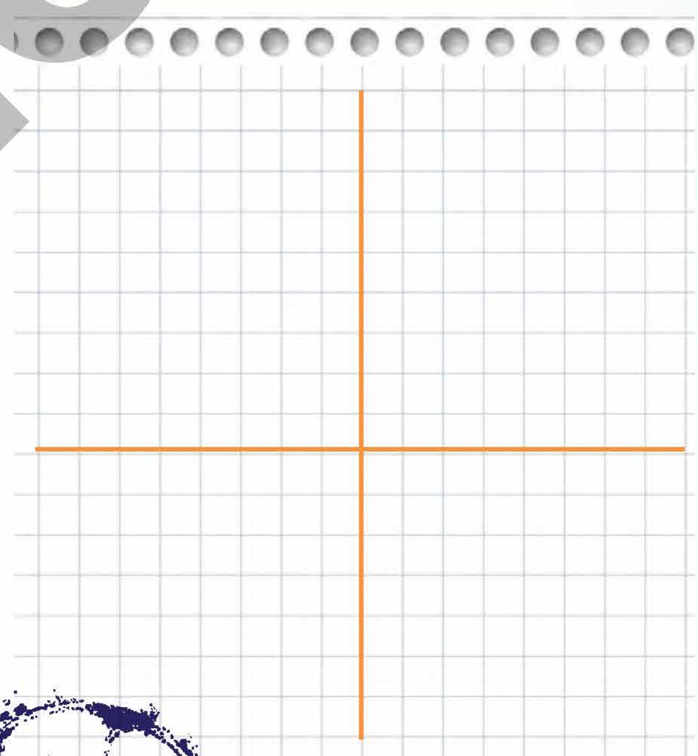


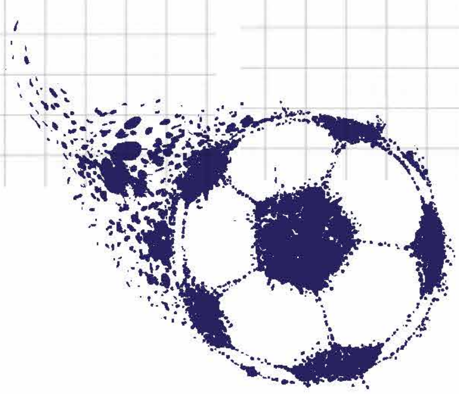
3. Dibuja la gráfica x vs t para un punto P sobre perímetro de rueda en movimiento uniforme:



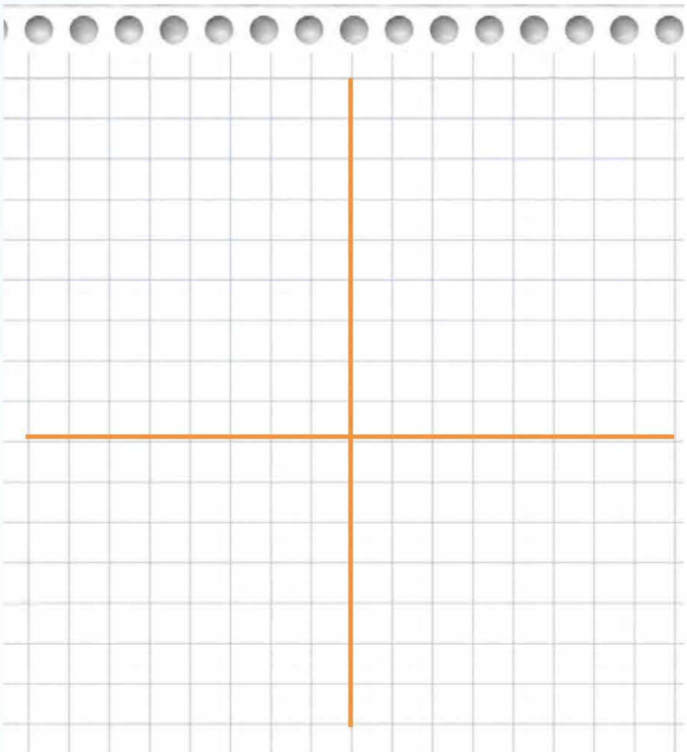
4. Dibuja la gráfica x vs t y y vs t para el movimiento de un balón lanzado en el aire con cierto ángulo.

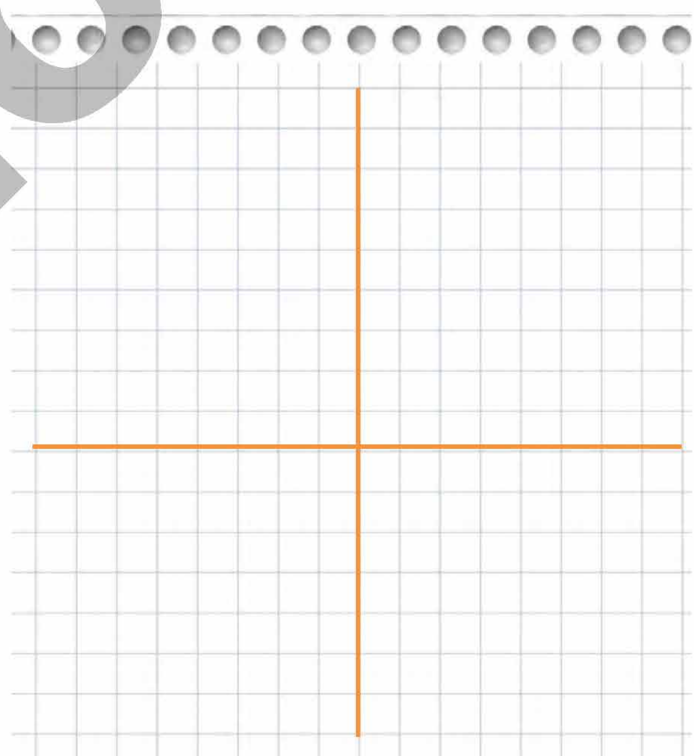






5. Dibuja la gráfica x vs t y y vs x para una pelota soltada desde la parte alta de una rampa.





4° Participación en la transformación en la sociedad.

El estudio del movimiento no solo nos ayuda a entender cómo se desplazan los objetos, sino también cómo evolucionamos como sociedad. Así como una trayectoria cambia según las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, nuestras acciones influyen en nuestro entorno. Trabajar juntos, compartir conocimientos y aplicar la ciencia nos permite transformar nuestra comunidad, impulsando el desarrollo y la innovación.

¡Felicidades, has explorado el movimiento y sus trayectorias a través de los modelos matemáticos. Ahora, con estos conocimientos, puedes analizar y predecir fenomenos físicos con mayor precisión!

ATERRIZAJE
(CIERRE)

Evaluar 5E

E. Con los conocimientos adquiridos en esta progresión, responde a cada pregunta.

Test de bases de ecuaciones paramétricas

Escala de Respuestas:

Si: Manejo los conceptos con naturalidad y los puedo aplicar en situaciones reales. (3 puntos)
Regular: Entiendo los conceptos, más me cuesta aplicarlos para resolver problemas. (2 puntos)
No: No entiendo los conceptos. (1 puntos)

1. Sé describir cualitativamente los distintos tipos de trayectorias.

Sí Regular No

2. ¿Entiendo el principio de parámetro dentro de este tipo de ecuaciones?

Sí Regular No

3. ¿Entiendo porqué el tiempo suele ser el parámetro para trayectorias planares?

Sí Regular No

Puntuación:

Suma tus respuestas y evalúa la comprensión de esta progresión.

8-9 Comprensión de bases ecuaciones paramétricas, óptima.
6-7 Comprensión de bases ecuaciones paramétricas, moderada, pero puede mejorar.
3-5 Comprensión de bases ecuaciones paramétricas, baja, considera tomar una asesoría.

¿Cuál fue tu resultado?

En equipos de 3 personas, comparen sus respuestas y discutan los temas que necesiten reforzar.

Progresión de aprendizaje **2**

Describiendo Trayectorias

Equipaje de mano

Metas
C1M1, C3M2
Categorías
C1, C3
Subcategorías
S2, S2

5E Enganchar

ABORDAJE
(INICIO)

Imagina que estás oyendo un partido de tu equipo favorito de futbol por la radio.

Último minuto del partido... El marcador está empatado, Herrera recibe el balón, lo detiene, está en el centro de la cancha, todos sus compañeros están cubiertos, ¡¡¡da dos pasos hacia atrás y tira!!! El balón sale con una elevación de 20º... y … ¡GOOOOL! ¡El balón entra por la portería a 1! 70 metros de altura!!! ¡GOOOOL!

Probablemente has podido imaginar la escena y con ello también el movimiento del balón.

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

5E Explorar

A. **Después de oír esta transmisión en la radio y sabiendo que la cancha mide 80 metros ¿podrías responder a las siguientes preguntas?**

1. ¿Qué trayectoria describe el balón?

2. Desde que Herrera tira, al instante en que el balón entra a la portería, ¿cuánto tiempo ha transcurrido y a qué velocidad salió el balón desde la patada de Herrera?

3. ¿Qué altura máxima alcanzó el balón?

4. ¿Con qué velocidad llegó el balón a la portería?

Explicar

Así como en el partido que acabamos de "oír", vamos a dar dos pasos atrás para recordar un par de conceptos y apuntalar algunas precisiones para nuestra trayectoria de aquí en adelante.

Existen dos problemas fundamentales en la Geometría Analítica:

1. Dada una ecuación hallar el lugar geométrico que representa.
2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

¿SABÍAS QUÉ?...

El movimiento parabólico, como el que sigue un balón de fútbol al ser pateado, es un ejemplo claro de cómo las matemáticas y la física están presentes en nuestra vida cotidiana. Cuando un objeto es lanzado con un ángulo determinado, su trayectoria forma una parábola debido a la influencia de la gravedad.

Lugar geométrico

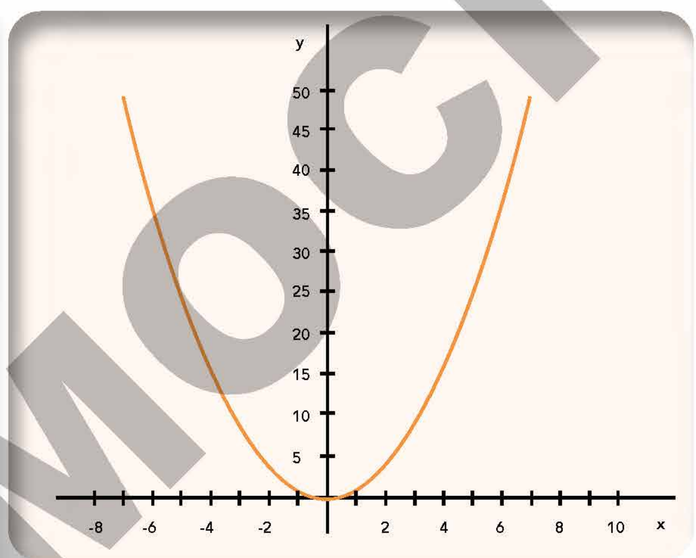
Anteriormente vimos que el conjunto solución de una ecuación es el conjunto de números que satisfacen la igualdad establecida por una ecuación, dependiendo del número de variables involucradas. Por otro lado, un lugar geométrico es un conjunto de puntos del plano (o del espacio) que cumplen una propiedad geométrica determinada, la cual en muchos casos puede expresarse mediante una ecuación matemática.

La solución de un problema de lugares geométricos es la ecuación de todos los puntos que cumplen dicha condición. La condición puede estar dada en términos de una relación algebraica entre las coordenadas de los puntos. En este caso el lugar geométrico corresponde al conjunto de soluciones de una ecuación o de una desigualdad.

Las líneas rectas son los conjuntos solución de las ecuaciones lineales $Ax + By = C$. También tenemos que los conjuntos de soluciones de ecuaciones de segundo grado en el plano son usualmente curvas, aunque también pueden ser puntos sueltos, o el vacío.

Por ejemplo, el lugar geométrico formado por la condición $y^2 = x$ es:

x	y
-7	49
-6	36
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49



El lugar geométrico se forma a partir de todos los puntos que integran el conjunto solución de una ecuación, es decir, su gráfica representa la unión de una infinidad de puntos. Sin embargo, en la práctica se toma como referencia las parejas ordenadas que se obtienen de la tabulación y se unen.

Los conjuntos de soluciones de ecuaciones en el plano resultan usualmente en rectas y/o curvas, aunque también pueden ser puntos sueltos, o el vacío. Veamos el ejemplo de la ecuación de un círculo:

El conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es un círculo.
El conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ es un punto.
El conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = -1$ es el vacío.

También podemos pensar en las curvas como las trayectorias de puntos que se mueven continuamente. Visto de este modo, la parametrización de una curva es una fórmula que da los puntos de la curva en función de un parámetro.

Las ecuaciones paramétricas resultan útiles para describir el movimiento a lo largo de una curva. Supongamos que una curva está definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, con $a \leq t \leq b$. A medida que t varía dentro del intervalo desde $t = a$ hacia $t = b$, los valores sucesivos de t dan lugar a un movimiento dirigido a lo largo de la curva, es decir, siguen la curva en cierta dirección mediante la sucesión de puntos (x, y) correspondientes.

Movimiento parabólico

La primera trayectoria que analizaremos es la del movimiento parabólico, el cual ocurre cuando un objeto se lanza con una velocidad inicial que forma un ángulo α con la horizontal. Este movimiento puede descomponerse en dos componentes: un **movimiento rectilíneo** uniforme en el eje horizontal y un **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado** en el eje vertical, debido a la gravedad. La trayectoria resultante **es una parábola**. Este modelo representa un caso ideal en el que el objeto se mueve bajo la influencia de un campo gravitatorio uniforme y sin la resistencia del aire.

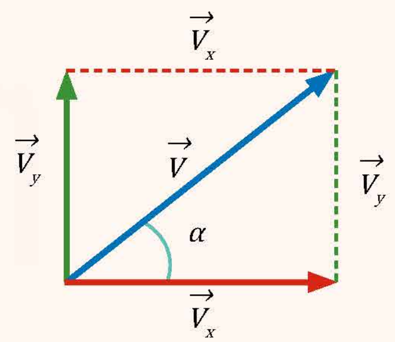
Cuando un objeto se mueve en un campo gravitatorio central, como lo es la Tierra, sigue una trayectoria elíptica. Sin embargo, en la superficie terrestre, su movimiento es similar al parabólico, lo que permite usar la ecuación de este último para simplificar cálculos. Aunque en realidad el objeto intenta seguir una elipse con el centro de la Tierra como foco, su trayectoria se interrumpe al chocar con el suelo. Dado que la diferencia entre la porción de la elipse y una parábola es mínima, el movimiento parabólico es una aproximación práctica para analizar la trayectoria de los objetos con relación a una superficie horizontal.

B. Actividad: Vean el siguiente video y comenten sus dudas en clase.

Las ecuaciones del movimiento parabólico son:

- Las ecuaciones del m.r.u. para el eje x: $x = x_0 + v_x * t$
- Las ecuaciones del m.r.u.a. para el eje y: $v_y = v_{0y} + a_y * t$
  $y = y_0 + v_{0y} * t + ½ * a_y * t^2$

La velocidad del objeto forma un ángulo α con la horizontal, esta velocidad se puede analizar en sus componentes x y y las cuales se determinan recurriendo a las relaciones trigonométricas más habituales:



Según las razones trigonométricas

$$\vec{V}_x = v \cdot \cos \alpha \qquad \vec{V}_y = v \cdot \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{V_y}{V_x}$$

Según el teorema de Pitágoras

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Descomposición del Vector Velocidad
Cualquier vector, incluida la velocidad puede descomponerse en 2 vectores que tienen la dirección de los ejes cartesianos $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$. Los módulos de ambos vectores pueden calcularse a partir del ángulo que crea el vector conla horizontal mediante las expresiones que aparecen en la figura.

Podemos precisar que:

Cuando la componente y de la velocidad (vy) sea 0, quiere decir que estaremos en el punto más alto de la parábola $y_0 = H$.

Cuando el objeto está sujeto a un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado hacia abajo a causa de la acción gravitacional, tenemos que $a_y = -g$

Podemos determinar las magnitudes del movimiento parabólico de la siguiente manera:

Posición (m)
Horizontal: $x = v_x * t = v_0 * cos(\alpha) * t$

Vertical: $y = H + v_{0y} * t - ½ * g * t^2 = H + v_{0y} * sin(\alpha) * t - ½ * g * t^2$

Velocidad (m/s)
Horizontal: $v_x = v_{0x} = v_0 * \cos(\alpha)$

Vertical: $v_y = v_{0y} - g * t = v_0 * \sin(\alpha) - g * t$

Aceleración (m/s^2)
Horizontal: $a_x = 0$

Vertical: $a_y = -g$

La ecuación de posición de un objeto nos sirve para saber en qué punto se encuentra en cada instante de tiempo. En el caso de un objeto que se desplaza en dos dimensiones, viene descrita por:

$$r(t) = x(t) * i + y(t) * j$$

Donde $r(t)$ es la posición en función del tiempo, $x(t)$ y $y(t)$ son las coordenadas en función del tiempo e i y j son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes OX y OY.

Si sustituimos las expresiones de la posición en el eje horizontal (m.r.u.) y en el eje vertical (m.r.u.a.) en la ecuación de posición genérica, podemos llegar a la expresión de la ecuación de posición para el movimiento parabólico.

$$r = (v_0 * \cos(\alpha) * t) * i + (H + v_0 * t - ½ * g * t^2) * j$$

Finalmente, podemos eliminar el parámetro t de la ecuación, para obtener la ecuación de la trayectoria:

$$y = H + v_{0y} \cdot \left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 = H + k_1 \cdot x - k_2 \cdot x^2 k_1 = \frac{v_{0y}}{v_x}; k_2 = \frac{1}{2 \cdot v_{ox}^2} \cdot g$$

1° Fomentar la identidad de México.

Fomentar la identidad nacional no sólo implica conocer nuestras historia y cultura sino también valorar las contribuciones científicas y tecnológicas de México. La educación y la ciencia son pilares del desarrollo del país, aprender matemáticas nos permite entender mejor el mundo que nos rodea.

C. Vean el siguiente video y repliquen el ejercicio en clase con otros valores.

Cuando nos enfrentamos a un problema de movimiento parabólico, también es de utilidad tener en cuenta los siguientes datos:

Altura máxima

Este valor se alcanza cuando la velocidad en el eje y, vy, vale 0. A partir de la ecuación de velocidad en el eje vertical, e imponiendo $vy = 0$, obtenemos el tiempo t que tarda el cuerpo en llegar a dicha altura. A partir de ese tiempo, se puede calcular la distancia al origen en el eje x y en el eje y.

$$y_{max} = (v_0 * \sin(\alpha)^2 \; / \; 2g$$

El valor máximo ocurre cuando el ángulo de tiro es $\alpha = 90°$

Alcance

Es la distancia máxima en horizontal desde el punto de inicio del movimiento al punto en el que el objeto impacta el suelo. Se obtiene sustituyendo el **tiempo de vuelo**, en la ecuación de posición de la componente horizontal.

$$x_{max} = v_0^2 \sin(\alpha)^2 / g$$

Su valor máximo se obtiene para un ángulo $\alpha = 45º$, teniendo el mismo valor para $\alpha = 45 + a$, que para $\alpha = 45 - a$. Por ejemplo, tienen el mismo alcance los proyectiles disparados con ángulos de tiro de 30° y 60º, ya que si $n(2 \cdot 30) = si$ $n(2 \cdot 60)$.

Tiempo de vuelo

Se calcula igualando a 0 la componente vertical de la posición. Es decir, el tiempo de vuelo es aquel para el cual la altura es 0 (se llega al suelo).

Ángulo de la trayectoria

El **ángulo de la trayectoria** en un determinado punto coincide con el ángulo que el vector velocidad forma con la horizontal en ese punto. Para su cálculo obtenemos las componentes v_x y v_y y gracias a la definición trigonométrica de tangente de un ángulo, calculamos α:

$$tan(a) = \frac{catetoopuesto}{catetoadyacente} = \frac{v_y}{v_x} \rightarrow a = tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

Elaborar

5E

Actividad de aprendizaje

D. Sigue las instrucciones en los siguientes ejercicios:

1. Un jugador de lanzamiento de bala de 1.95 metros de altura consigue lanzar el peso a 25 metros de distancia. Si la trayectoria se inicia con una elevación de .69 rad, calcula el tiempo de vuelo, velocidad inicial y la altura máxima alcanzada.

2. Calcula la altura máxima que alcanza un proyectil disparado a nivel del suelo con una velocidad de 42 m/s a un ángulo de 37°.

3. Si un proyectil sale a nivel del piso con una $v_0 = 200\ m/s$ y una inclinación de 3°:
   a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?
   b) ¿Que distancia ha recorrido cuanto se encuentra en su punto más alto?
   c) ¿Qué distancia ha recorrido cuando cae?

4. ¿A qué altura debes situar un cañón que lanza proyectiles en posición horizontal a una velocidad inicial de $230\ km/h$, si quieres que caigan a una distancia de $250\ m$ de la posición de lanzamiento? Considerando la aceleración de la gravedad en $9.8\ m/s$ y que el cañón se sitúa en el origen.

2° Responsabilidad ciudadana

Responsabilidad ciudadana y la importancia del conocimiento en la sociedad

Ser ciudadano responsable significa utilizar el conocimiento para mejorar nuestro entorno. La educación nos da herramientas para resolver problemas comunes, desde el uso responsable de los recursos naturales hasta el desarrollo de proyectos comunitarios. Aplicar principios matemáticos y científicos nos ayuda a comprender fenómenos físicos, como las trayectorias en los deportes o el impacto de nuestras acciones en el medio ambiente.

Evaluar 5E

E. **Con los conocimientos adquiridos en esta progresión, responde a cada pregunta.**

Test de trigonometría

Escala de Respuestas:

Si: Manejo los conceptos con naturalidad y los puedo aplicar en situaciones reales. (3 puntos)
Regular: Entiendo los conceptos, más me cuesta aplicarlos para resolver problemas. (2 puntos)
No: No entiendo los conceptos. (1 puntos)

1. ¿Sé obtener las componentes del movimiento parabólico (velocidad, ángulo, distancia o tiempo)?

Si Regular No

2. ¿Entiendo porqué la gravedad influye en un eje y no en el otro?

Si Regular No

3. ¿Sé resolver problemas de movimiento parabólico?

Si Regular No

Puntuación:

Suma tus respuestas y evalúa la comprensión de esta progresión:
8-9 Comprensión de bases de trayectorias, óptima.
6-7 Comprensión de bases de trayectorias, moderada, pero puede mejorar.
3-5 Comprensión de bases de trayectorias, baja, considera tomar una asesoría.

4. ¿Cuál fue tu resultado? ¿Qué tema de esta progresión te gustaría reforzar?

5. En equipos de 3 personas, comparen sus respuestas y discutan los temas que necesiten reforzar. Describe brevemente las conclusiones o puntos importantes que te ayuden a entender mejor el tema.

Progresión de aprendizaje **3**

Deducción de Curvas Planas

Equipaje de mano

Metas
C1M2, C2M1, C4M1
Categorías
C1, C2, C4
Subcategorías
S1, S2, S1, S3

5E Enganchar

ABORDAJE
(INICIO)

La deducción es la llave que abre las puertas del conocimiento. Nos permite, a partir de principios simples, descubrir verdades profundas y desentrañar los misterios del universo. Es el método que llevó a Newton a comprender la gravedad y a Einstein a formular la relatividad.

Quien domina la deducción no sólo resuelve problemas, sino que también aprende a ver más allá de lo evidente, a conectar ideas dispersas, a construir nuevos caminos donde otros sólo ven límites. Cada pregunta es un enigma, y cada respuesta, un escalón hacia la comprensión.

Con lógica, paciencia y curiosidad, la deducción nos convierte en exploradores de lo desconocido. Porque pensar con claridad es la mayor forma de poder.

¿Cuántos secretos más podríamos revelar si aprendiéramos a cuestionar todo con la mente abierta?

Actividad de aprendizaje

A. Cápsula de Bienestar Emocional Afectivo: Mira el siguiente video y comenta con tus compañeros ¿Qué tanto confían en su intuición? ¿Qué similitudes y diferencias hay entre la intuición y la deducción

TRAYECTORIA
(DESARROLLO)

5E Explorar

La deducción es un pilar fundamental del razonamiento matemático. A través de ella, partimos de principios generales y axiomas para demostrar teoremas, resolver ecuaciones y construir estructuras lógicas coherentes.

Cada vez que aplicamos una propiedad algebraica, seguimos un teorema o utilizamos reglas de inferencia, estamos usando la deducción. Por ejemplo, en la geometría, desde los postulados de Euclides deducimos propiedades de figuras y relaciones angulares. La deducción nos permite no solo resolver problemas, sino también asegurarnos de que las soluciones sean correctas y universales.

B. A partir del siguiente conjunto de ecuaciones paramétricas responde las siguientes preguntas.

$$x = 1 - t^2, \qquad y = t - 2\ ; \qquad -2 \leq t \leq 2$$

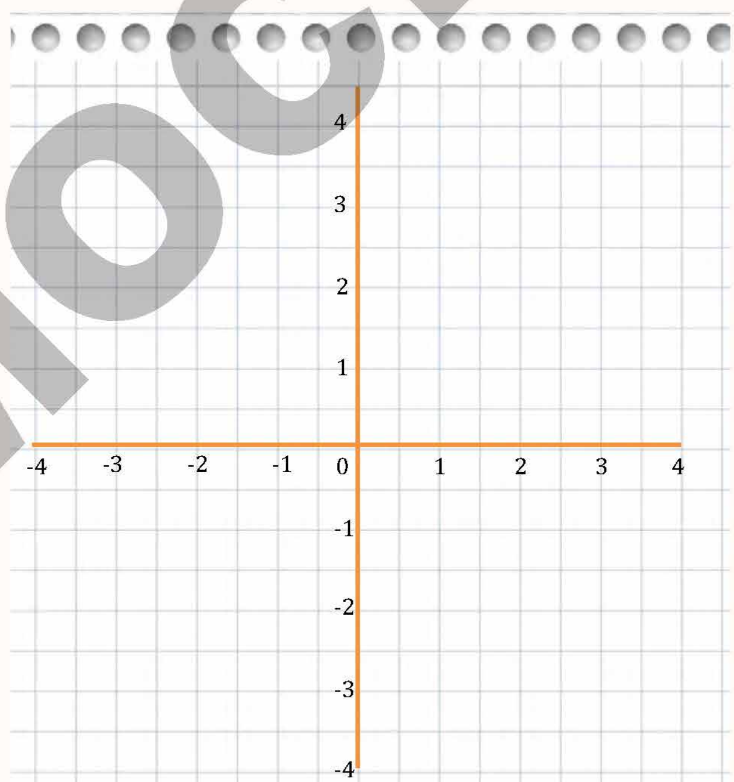
1. ¿Qué lugar geométrico describe el conjunto de ecuaciones?

2. ¿Si t fueran segundos, que periodo abarca la ecuación?

3. Realiza la tabulación de la ecuación:

4. A partir de los datos obtenidos, grafica los puntos y únelos

t	x	y



2° Responsabilidad ciudadana

Cápsula de Responsabilidad Ciudadana

La resolución de problemas matemáticos fomenta el pensamiento crítico y la toma de decisiones informadas, habilidades clave para contribuir al desarrollo de la sociedad.

Explicar 5E

Curvas planas

En el libro anterior de Temas Selectos de Matemáticas I, empezamos el estudio de las curvas en el plano, específicamente las secciones cónicas, y obtuvimos la gráfica mediante una sola ecuación con dos variables. En esta ocasión estudiaremos situaciones en las que se emplean tres variables para representar una curva en el plano.

Hemos visto que se puede expresar cualquier cónica mediante una ecuación de segundo grado con dos variables x e y. Sin embargo, existe otra manera de describir estas curvas utilizando una tercera variable y haciendo que x e y dependan de ella. De este modo, para describir una cónica se utilizarán dos ecuaciones que nos darán el valor de x y de y para cada valor de la tercera variable, la cual llamamos parámetro. Este parámetro existe en un intervalo determinado de valores.

Una **curva plana (C)**, es aquella formada por todos los pares ordenados $f(t)$, $g(t)$, donde f y g son funciones continuas de el parámetro (t) en un intervalo I, entonces a las ecuaciones $x = f(t)$ e

$y = g(t)$, se les llama ecuaciones paramétricas, a las cuales nos podemos referir como **ecuación en** x y **ecuación en** y.

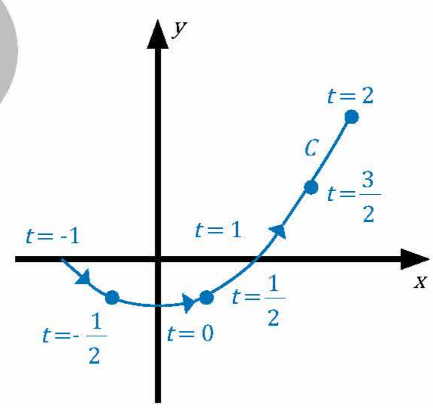
t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

A la curva definida por el conjunto de puntos (x, y) que se obtiene cuando t varía sobre el intervalo I se le llama la gráfica de las ecuaciones paramétricas. Para ello, con frecuencia utilizamos la notación:

$x = f(t), \qquad y = g(t); \qquad a \leq t \leq b$

A la cual, si le asignamos valores, nos permite obtener la siguiente tabla y coordenadas:

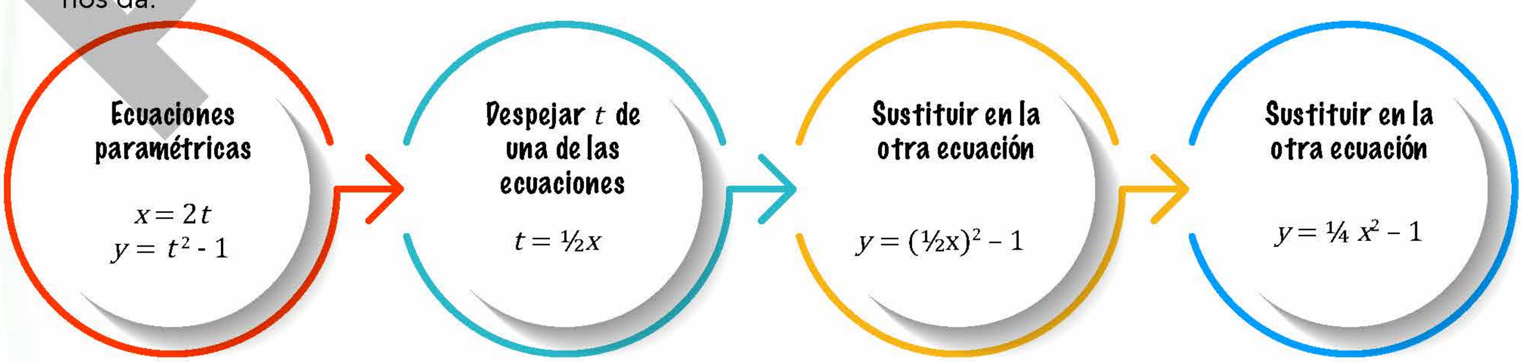
$x = 2t, \qquad y = t^2 - 1\,; \qquad -1 \leq t \leq 2$



Eliminación del parámetro

Cuando trabajamos con sistemas de ecuaciones paramétricas, a veces, puede resultar complicado identificar el tipo de curva que representan. Una forma de resolver este problema es **eliminar el parámetro**, lo que permite reescribir la ecuación en su forma **rectangular** y así obtener una descripción más conocida que permita reconocer más fácilmente la naturaleza de la curva.

Si de la ecuación en x despejamos t, obtenemos $t = \frac{1}{2}x$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación en y nos da:



En la forma de ecuación rectangular, podemos reconocer que en este caso se trata de una parábola.

Sin embargo, cuando hablamos de trayectorias, esta ecuación no proporciona toda la información necesaria. Si bien establece el lugar geométrico dónde se encuentra el objeto, no nos indica el instante cuándo el objeto se encuentra en un punto dado (x, y). Para determinar esta posición, se introduce una tercera variable t, la cual puede ser el tiempo. Expresando x e y como funciones de t, tenemos una descripción más precisa de la trayectoria.

También puede ocurrir que cuando cambiamos de un conjunto de ecuaciones paramétricas a su forma rectangular, el rango determinado para x e y se altere. En estos casos, es necesario **ajustar el dominio** de la ecuación rectangular para asegurarse de que su gráfica coincida con la curva definida por las ecuaciones paramétricas.

Lo anterior nos lleva de vuelta la primera de las problemáticas fundamentales de la geometría analítica **"hallar el lugar geométrico que representa una ecuación"** para lo cual podemos emplear un método de análisis denominado **"discusión de la curva"**. Este análisis permite identificar propiedades clave de la ecuación antes de representarla en el plano cartesiano.

Discusión de la curva

El método más común para trazar una gráfica consiste en generar una tabla de valores asignando distintos números a las variables y luego conectar los puntos obtenidos con una línea continua. Sin embargo, este procedimiento no siempre es válido, ya que algunas curvas pueden presentar **discontinuidades, puntos de retorno o cambios bruscos de dirección**. Además, si la ecuación está parametrizada, pueden existir **puntos donde la velocidad se anula**, lo que afecta la interpretación geométrica de la curva.

Por esta razón, antes de graficar, es fundamental analizar aspectos como el dominio, la continuidad y la orientación de la curva para garantizar una representación precisa. Para evitar errores en el trazado, es necesario realizar una investigación previa de la ecuación, lo que permite identificar las siguientes características:

Intersección con los ejes

Nos permite obtener los puntos de intersección del lugar geométrico con los ejes coordenados.

Para hallar la intersección con el eje x se hace $y = 0$ en la ecuación dada y se despeja la variable. Análogamente, para hallar la intersección con el eje y se hace $x = 0$ y se despeja y.

Algunas ecuaciones pueden tener uno, varios o ningún punto de intersección con los ejes coordenados.

C. Actividad: En el siguiente video puedes ver un ejemplo de cómo se hace la discusión de una curva respecto a la intersección con los ejes.

Simetría

Podemos decir que un lugar geométrico tiene simetría cuando a un punto P cualquiera, le corresponde otro punto P_1 con valores iguales, pero de signo contrario. Existen tres casos posibles:

a) Simetría al eje x: Ocurre cuando por cada valor de x se obtienen dos valores iguales, pero de signos contrarios de y. Si una ecuación no se altera en su representación gráfica o lugar geométrico al sustituir y por $-y$, se dice que es simétrica respecto al eje x. Por ejemplo, una parábola de tipo $x=y^2$

b) Simetría al eje y: Ocurre cuando por cada valor de y se obtienen dos valores iguales, pero de signos contrarios de x. Si una ecuación no se altera en su representación gráfica o lugar geométrico al sustituir x por $-x$, se dice que es simétrica respecto al eje y. Por ejemplo, una parábola de tipo $y=x^2$

c) Simetría central: Una curva tiene simetría central cuando para cualquier punto que pertenezca al primer cuadrante equidista otro punto que esté en el tercer cuadrante o, si para cualquier punto que se ubique en el segundo cuadrante, equidista otro punto que se localice en el cuarto cuadrante. Por lo tanto, si una ecuación no se altera en su representación gráfica o lugar geométrico al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ simultáneamente, es simétrica respecto al origen. Por ejemplo, una circunferencia $x^2+y^2=1$

D. En el siguiente video puedes ver una explicación de simetría en plano cartesiano.

Extensión

La extensión de una curva nos permite conocer el comportamiento de la curva en términos de su dominio, crecimiento y los valores que toma en el plano cartesiano. Nos indica hasta dónde se extiende la curva y cómo se comporta en distintos rangos del parámetro (si es una ecuación paramétrica) o de las variables involucradas. La extensión nos permite conocer aspectos clave sobre una curva:

Dominio

- Determina qué valores de la variable independiente (o del parámetro en ecuaciones paramétricas) generan puntos válidos en la curva.
- En funciones explícitas $y=f(x)$, el dominio es el conjunto de valores de x para los cuales la función está definida.
- En ecuaciones paramétricas $x=f(t)$, $y=g(t)$, el dominio viene dado por el intervalo de valores de t.

Por ejemplo: Para la función $y=\sqrt{x}$, el dominio es $x\geq 0$, ya que no podemos tomar raíces de números negativos en los reales.

Extensión en el plano cartesiano

- Analiza hasta dónde se extiende la curva en los ejes x e y.
- Se estudian **límites y asíntotas**, si existen.
- Se identifican posibles **puntos de acumulación** o **valores máximos y mínimos** en los ejes.

Por ejemplo: Para la hipérbola $y=1/x$, al hacer $x\to\infty$, vemos que $y\to 0$, lo que indica una asíntota horizontal.

Comportamiento en los extremos

- Examina el comportamiento de la curva para valores grandes o pequeños de la variable (por ejemplo, qué sucede cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.
- Se analizan si la curva tiende a la asíntota o si la curva **se cierra sobre sí misma**.

Por ejemplo: La elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$ tiene extensión limitada, ya que se restringe a $-2 \leq x \leq 2$ y $-3 \leq y \leq 3$.

Conexión con la continuidad y periodicidad

- Si la curva es **periódica**, su extensión se puede repetir indefinidamente.
- Si tiene discontinuidades, se debe determinar cómo se interrumpe su extensión

Por ejemplo: La circunferencia $x = \cos t$, $y = \sin t$ es una curva cerrada, ya que para $t \in [0,2\pi]$ la trayectoria se completa.

Asíntotas

Una asíntota es la recta a la que una curva se acerca indefinidamente sin llegar a tocarla. Representa el comportamiento de la curva en los extremos o en puntos específicos donde la función no está definida. Es una consecuencia de la extensión.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales u oblicuas.

- Una asíntota vertical ocurre cuando la función tiende a infinito en ciertos valores de x.
- Una asíntota horizontal ocurre cuando a medida que x crece indefinidamente, la función tiende a un número finito.
- Una asíntota oblicua ocurre cuando el límite de la función tiende a una línea recta de la forma
- $y = mx+b$.

Un avión aterrizando, muestra su trayectoria de descenso como una asíntota.

En el caso de las funciones racionales, las asíntotas verticales se deducen de la expresión despejada para y y de los valores de x que no están en el dominio de la función, es decir, los que anulan el denominador.

Por ejemplo, la curva $y = 1/(x\text{-}3)(x\text{-}5)$ y tiene dos asíntotas verticales: una en $x = 3$ y la otra en $x = 5$.

En el caso de las funciones racionales, las asíntotas horizontales se deducen de la expresión despejada para x y de los valores de y que anulan el denominador.

E. Actividad: Vean el siguiente video y reproduzcan el ejercicio en la calculadora gráfica de Geogebra y experimentando con diversos valores, para ver cómo cambian las asíntotas.

Tabulación y Trazado de la curva

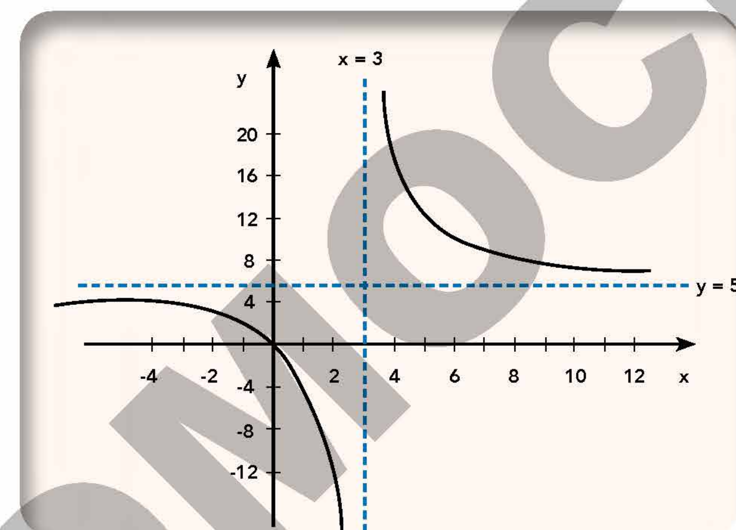
Una vez conocida la extensión de dominio de la ecuación, podemos sustituir el valor de alguna de las variables con valores que nos sean útiles para el cálculo de coordenadas y así poder obtener los puntos que trasladaremos a la gráfica.

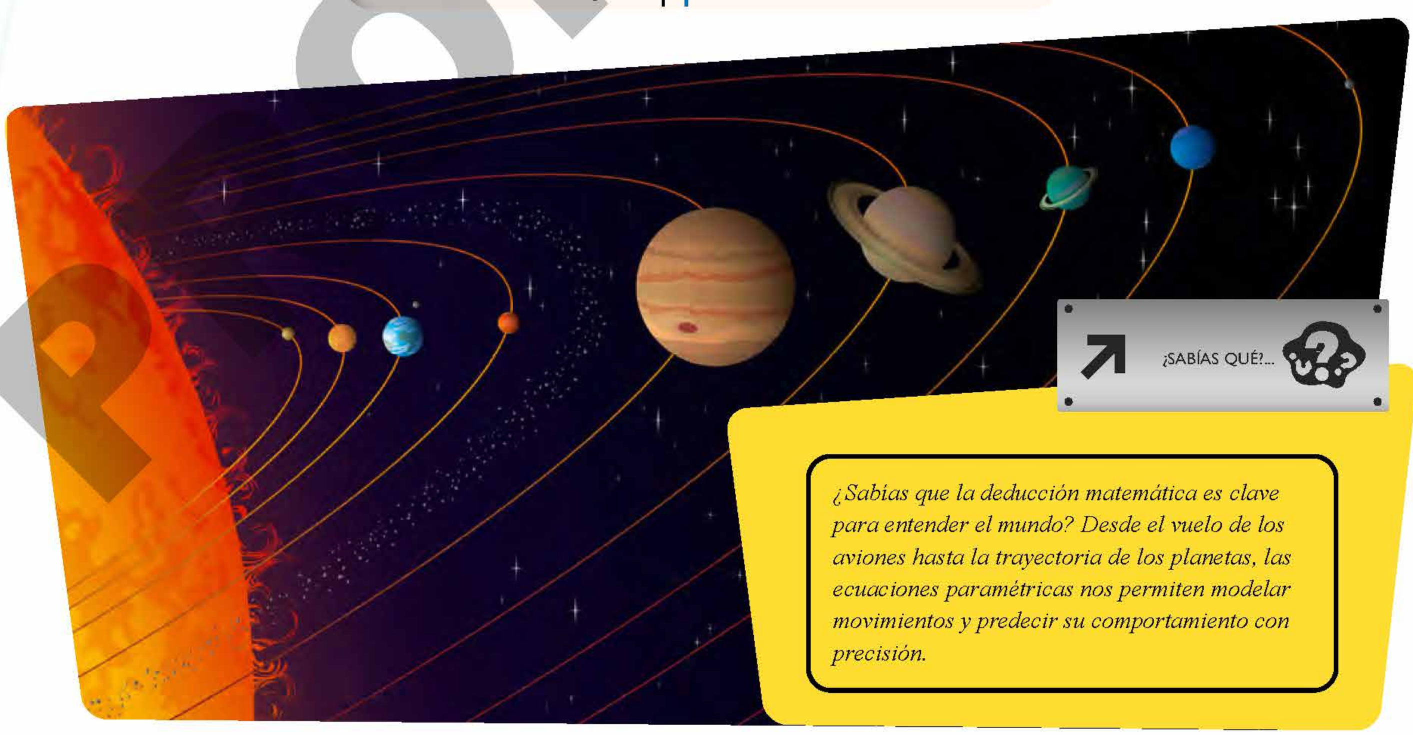
Una vez obtenidos los pares de coordenadas (x, y) podemos trasladarlos al plano cartesiano y unirlos con una línea continua, delimitando así el lugar geométrico de la ecuación.

Por ejemplo, para la ecuación $xy - 3y - 5x = 0$, una vez llegados a la tabulación, podemos obtener la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2.5	2	1.25	0	-2.5	-10	no definido	20	12.5	10	8.75	8	7.5	7.14

La cual da lugar a la gráfica:





¡SABÍAS QUÉ?...

¿Sabías que la deducción matemática es clave para entender el mundo? Desde el vuelo de los aviones hasta la trayectoria de los planetas, las ecuaciones paramétricas nos permiten modelar movimientos y predecir su comportamiento con precisión.

Actividad de aprendizaje

F. Realiza la discusión de la curva para las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 + y^2 = 25$

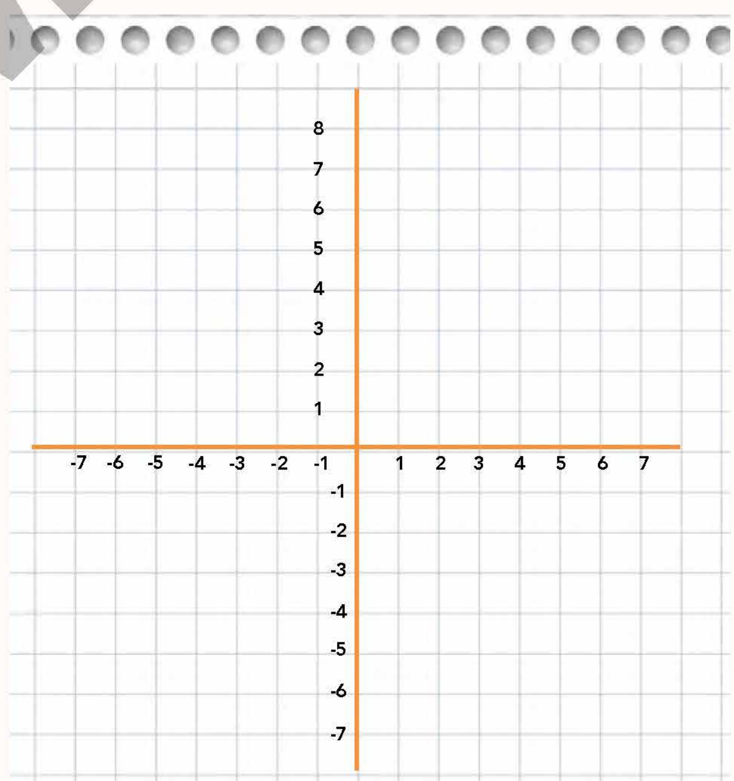
Simetría: respecto al eje x _____ respecto al eje y _____

Extensión:

Asíntotas:

Tabulación:

x	y



2. $y^2 + 8x - 8y - 24 = 0$

Intersecciones: en el eje x _____ en el eje y _____

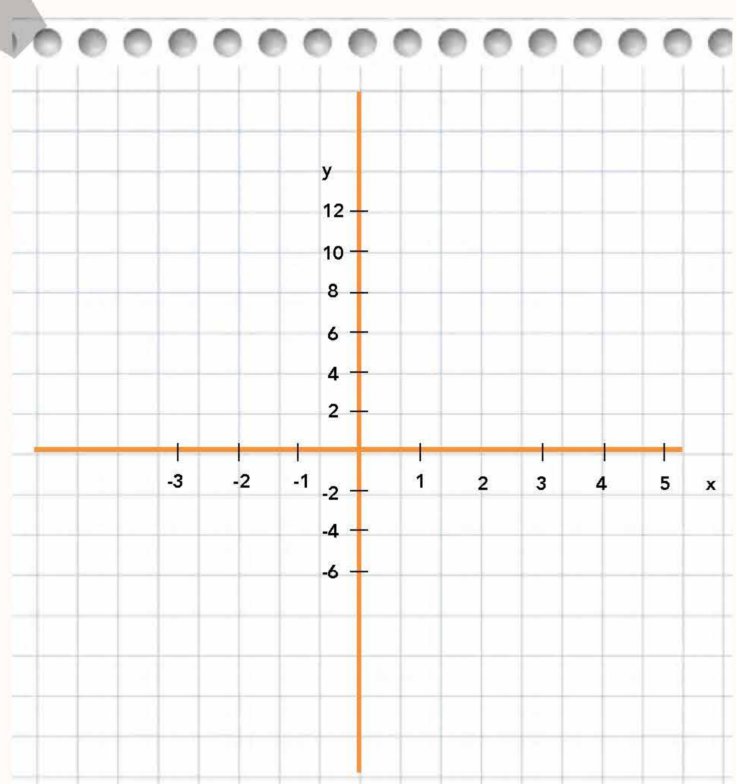
Simetría: respecto al eje x _____ respecto al eje y _____

Extensión:

Asíntotas:

Tabulación:

x	y



Evaluar 5E

G. **Con los conocimientos adquiridos en esta progresión, responde a cada pregunta.**

Test de bases de curvas planas

Escala de Respuestas:

Si: Manejo los conceptos con naturalidad y los puedo aplicar en situaciones reales. (3 puntos)
Regular: Entiendo los conceptos, más me cuesta aplicarlos para resolver problemas (2 puntos)
No: No entiendo los conceptos. (1 puntos)

1. ¿Sé los pasos para realizar la discusión de una curva?

Si Regular No

2. ¿Sé identificar las propiedades geométricas de una curva plana a partir de su expresión algebraica y de los datos obtenidos en la discusión de la curva?

Si Regular No

3. ¿Sé realizar la tabulación y trazado de la curva en el plano cartesiano?

Si Regular No

Puntuación:

Suma tus respuestas y evalúa la comprensión de esta progresión:
8-9 Comprensión de bases de curvas planas, óptima.
6-7 Comprensión de bases de curvas planas, moderada, pero puede mejorar.
3-5 Comprensión de bases de curvas, baja, considera tomar una asesoría.

¿Cuál fue tu resultado? ¿Qué tema de esta progresión te gustaría reforzar?

En equipos de 3 personas, comparen sus respuestas y discutan los temas que necesiten reforzar. Describe brevemente las conclusiones o puntos importantes que te ayuden a entender mejor el tema.

Progresión de aprendizaje **4**

Componentes de una Recta

Equipaje de mano

Metas
C3M3
Categorías
C3
Subcategorías
S3

5E Enganchar

ABORDAJE
(INICIO)

¿Sabías que calcular tus consumos de gasolina puede ayudarte a planear mejor tus próximas vacaciones?

Cuando se viaja en carretera un vehículo consume combustible a una tasa constante, es decir, la cantidad de combustible consumida (C) es directamente proporcional a la distancia recorrida (d) por el consumo de litros por kilómetro específico del vehículo (k):

$$C = kd$$

Si la distancia recorrida se duplica, el consumo de combustible también se duplica.

Si el vehículo no se mueve $(d = 0)$, no consume combustible $(C = 0)$, lo que significa que la gráfica pasa por el origen.

La eficiencia del vehículo está representada por la pendiente (k). Un valor alto de k significa que el vehículo consume más combustible por cada kilómetro recorrido y viceversa.

A. Lee los siguientes ejemplos y contesta las preguntas.

1. Si un automóvil consume 0.08 litros por kilómetro, ¿cuál sería la ecuación?

2. Para recorrer 100 km, ¿Cuántos litros se requieren?:

B. Actividad. Fomentar la identidad con México: ¿Ya sabes a dónde ir en tus próximas vacaciones? Además del consumo de gasolina, puedes calcular los costos de las casetas en la siguiente página de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes. Calcula tus próximas vacaciones y comenta con tus compañeros.

https://app.sct.gob.mx/sibuac_internet/ControllerUI?action=cmdEscogeRuta

EDUCACIÓN PARA LA SALUD

¿Sabías que tomar vacaciones puede mejorar tu salud tanto como una buena alimentación o el ejercicio?

Las vacaciones no solo son una oportunidad para descansar, sino que también tienen múltiples beneficios para la salud. Reducen el estrés al alejarte de las preocupaciones diarias, permitiendo que tu mente y cuerpo se relajen. Simplemente cambiar de rutina estimula la creatividad, fortalece las relaciones interpersonales, reduce el riesgo de padecer enfermedades cardiovasculares, mejora el bienestar emocional y la calidad del sueño. Tomarse un respiro no es un lujo, sino una inversión en salud y felicidad. ¿Conocías estos beneficios de las vacaciones?

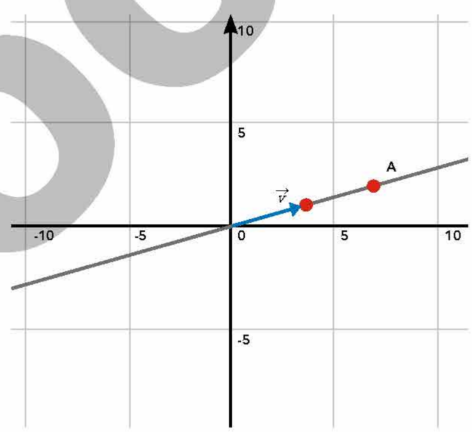
TRAYECTORIA (DESARROLLO)

5E Explorar

Para calcular el consumo de gasolina en un vehículo, es común utilizar la relación entre la **distancia recorrida** y la **eficiencia del vehículo** para calcular la **cantidad de combustible requerido**. Esta relación en una gráfica resulta en una recta con la pendiente dada por la eficiencia del vehículo.

Así como el desplazamiento del vehículo sigue un patrón definido por su consumo de combustible, en geometría analítica, el vector dirección define la dirección en la que se extiende una recta a partir de un punto dado.

La siguiente gráfica representa la posición de un punto A (7,2) y un vector dirección v (3.5,1). A partir de la información anterior, responde las siguientes preguntas.



C. Resuelve las siguientes ecuaciones.

1. Determina las ecuaciones paramétricas de la recta y describe el proceso para llegar a éstas.

2. Encuentra otro punto que pertenezca a la recta y describe el proceso para hallarlo.

Explicar

¿Para qué sirven las gráficas?

Las gráficas son herramientas visuales fundamentales que permiten representar y analizar la relación entre distintas variables de manera clara y comprensible. Se utilizan en diversas disciplinas como la física, la economía, la estadística y la ingeniería para visualizar datos, identificar patrones y facilitar la interpretación de fenómenos.

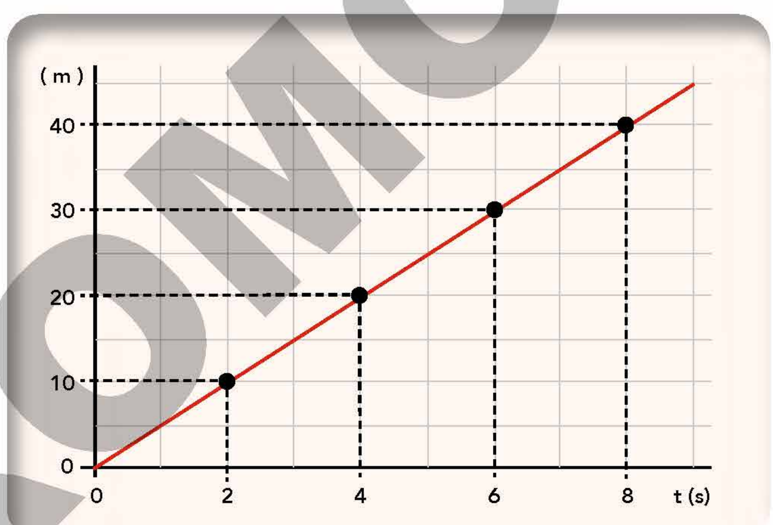
Gráficas de rectas

Las gráficas de rectas que pasan por el origen, son especialmente útiles para analizar cuando dos variables tienen una relación de **proporcionalidad directa**, es decir, cuando una de ellas es un múltiplo constante de la otra. Matemáticamente, esta relación se expresa como:

$$y = mx$$

Cuando la recta pasa por el origen esto indica que si la variable independiente (x) es cero, entonces la variable dependiente (y) también lo será. Es decir, si no hay un valor de entrada, tampoco habrá un valor de salida.

Un ejemplo de esto pasa para describir un **Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)**, en el cual un objeto se mueve a velocidad constante en una dirección fija, donde la distancia recorrida es proporcional al tiempo transcurrido, ya que la velocidad es constante.



Podemos interpretar de la gráfica: la posición del objeto se encuentra en el origen en el primer instante; se desplaza a velocidad constante; no hay aceleración en el movimiento; a mayor pendiente, mayor rapidez.

Determinación de una recta

En geometría euclidiana, una recta se define como una sucesión continua de puntos que se extiende infinitamente en una única dirección. Para determinar una recta, es necesario conocer al menos la posición de uno de sus puntos y la dirección en la que se extiende. Alternativamente, también se puede conocer una recta mediante la ubicación de dos puntos distintos que pertenezcan a ella.

La ecuación cartesiana de una recta se puede representar de la forma:

$$y = mx + b$$

x : es la variable independiente

y : es la variable dependiente

m : es la constante de proporcionalidad, es decir, nos indica la pendiente o inclinación de la recta.

b : es el punto de intersección con el eje y

Parametrización 1 de la recta

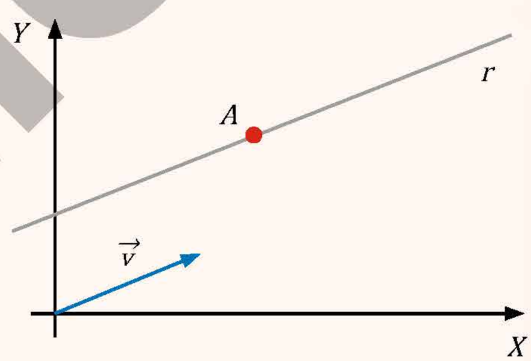
Analíticamente, cualquier recta puede determinarse mediante un punto P que pertenece a ella y una dirección, la cual puede expresarse mediante un vector director distinto a cero.

Por lo tanto, si conocemos un punto A (a1, a2) de la recta r y sabemos que tiene un vector director $v = (v_1, v_2)$ podemos escribir su ecuación como:

$(x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(v_1, v_2) \qquad \lambda \in R$
ó $(x, y) = (a_1 + \lambda v_1,\ a_2 + \lambda v_2) \qquad \lambda \in R$

Si separamos sus componentes cartesianas, obtenemos el conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y = a_2 + \lambda \cdot v_2 \end{cases} \quad \lambda \in R$$



x e y son los valores respectivos de cualquier punto (P) de la recta r.

a_1 y a_2 son las componentes x e y de un punto (A) conocido de la recta r.

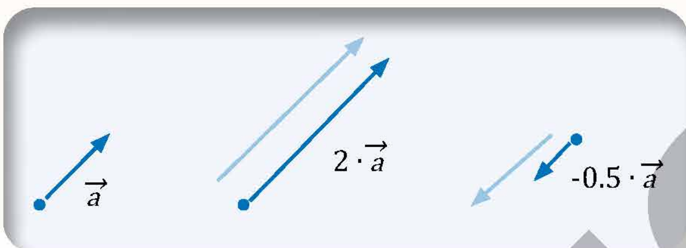
v_1 y v_2 son las componentes x e y de un vector director $v = (v_1, v_2)$ cuya dirección sea la de la recta.

λ es el parámetro (puede ser λ, t, etc.), es un valor real (un escalar) que determina cada coordenada P(x,y) dependiendo el valor que se le asigne.

Vector director

Un **vector director** es un segmento de recta que define la dirección de una recta en el espacio euclidiano. Su principal función es proporcionar una referencia para describir la orientación de la recta sin importar su posición específica, entre sus características podemos destacar que:

1. El vector director siempre es paralelo a la recta r.
2. Un vector director no tiene un punto fijo de inicio; solo señala en qué dirección se extiende la recta. Lo podemos definir como la dirección hasta un punto desde el origen o bien como la relación de proporcionalidad entre dos puntos.
3. Cualquier múltiplo del vector director también es un vector director de la misma recta, ya que conserva la misma dirección.



Sus componentes cartesianas v_x y v_y nos permiten calcular el módulo y dirección del vector a partir el ángulo α formado entre el vector y el semieje x positivo (o por el ángulo β formado entre el vector y el semieje y negativo).

De esta forma, si usamos el teorema de Pitágoras, podemos deducir que:

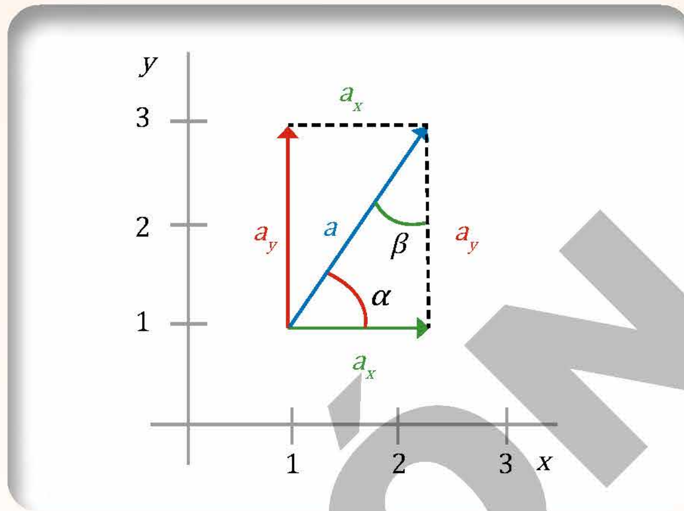
$$v\rightarrow = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

También podemos emplear las definiciones del seno y del coseno para calcular las componentes cartesianas.

$$v_x = v \cdot \cos(\alpha) = v \cdot \sin(\beta)$$
$$v_y = v \cdot \sin(\alpha) = v \cdot \cos(\beta)$$

O bien, si contamos con dos puntos paralelos o sobre a la recta, podemos definir un vector $v\rightarrow$ con origen en el punto A = (A_x, A_y) y extremo en el punto B = (B_x, B_y) y calcular sus componentes cartesianas v_x y v_y de la siguiente forma:

$$v_x = B_x - A_x$$
$$v_y = B_y - A_y$$



Recta a partir de dos puntos

Si en vez de conocer un punto A y un vector director v de una recta conocemos al menos dos puntos dentro de la recta sean esos puntos A y B, también podremos calcular su ecuación paramétrica. Para ello, basta con utilizar ambos puntos para calcular un vector director ya que por definición el vector es paralelo a la recta.

De esta forma, un posible vector director para una recta en la que conocemos al menos dos puntos A y B podría ser $v = (b_x - a_x, b_y - a_y)$. Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de cualquier recta, a partir de dos puntos se pueden obtener por medio de la expresión:

$$x = a_x + \lambda (b_x - a_x)$$
$$y = a_y + \lambda (b_y - a_y)$$

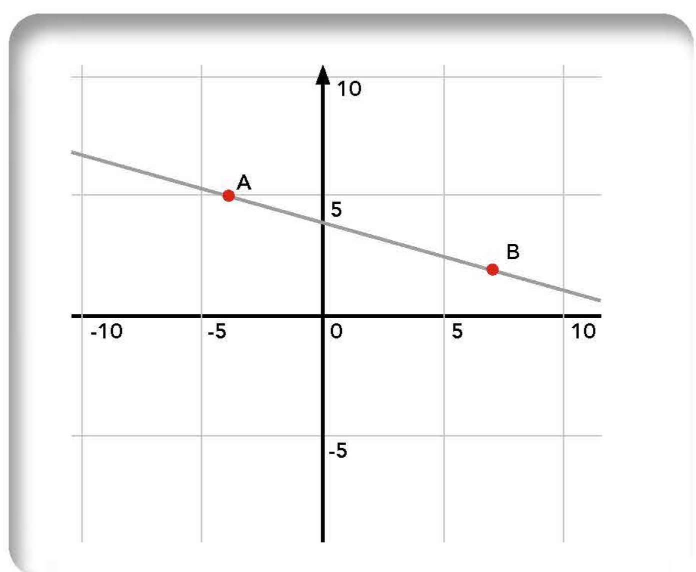
Datos

A (-4.00, 5.00) B(7.00, 2.00)

Ecuaciones paramétricas

x = -4.00 + λ (11.00)

y = 5.00 + λ (-3.00), λ ϵ R



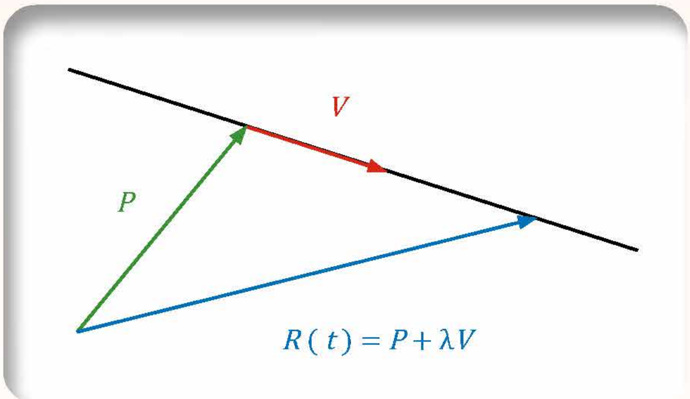
Parametrización 2 de la recta

Si retomamos la ecuación de la recta en su forma:

$(x, y) = (a_x, a_y) + \lambda(v_x, v_y)$

Podemos escribirla también en la forma:

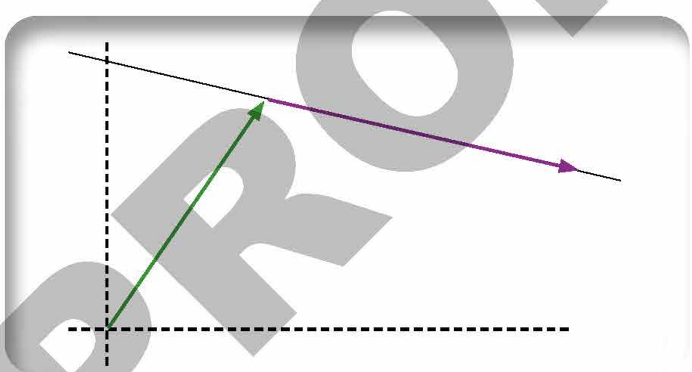
$R(t) = P + \lambda V$



Donde $R(t)$ es cualquier punto de la recta en función de un parámetro, la cual pasa por un punto conocido P, tiene la dirección del vector V y donde λ es un escalar. Los puntos de la recta están dados en función del parámetro λ.

Por ejemplo: Una recta que pasa por el punto (2,3) y tiene un vector director (4,-1)

Se representa como:
$R(t) = (2{,}3) + \lambda(4{,}-1) = (4\lambda + 2{,} -\lambda + 3)$



Una recta tienen muchas parametrizaciones

Si pensamos en el parámetro como el tiempo (t), la parametrización $R(t) = P + t(Q - P)$ recorre la recta que contiene a los puntos P y Q a velocidad constante, pasando por P en $t = 0$ y por Q en $t = 1$. Pero podemos recorrer la recta al revés, usando la parametrización $S(t) = Q + t(P - Q)$ que pasa por Q en $t = 0$ y pasa por P en $t = 1$.

Podemos también recorrerla más rápido o más despacio, pasando por P y Q en los momentos que queramos. Las diferentes parametrizaciones recorren la recta a todas las velocidades y empezando en todos sus puntos y en ambos sentidos.

Eliminación del parámetro

Cuando empleamos parametrizaciones de una recta, obtenemos las coordenadas de los puntos de en términos del parámetro. Si queremos describir a los puntos de la recta por medio de relaciones entre sus coordenadas que no dependen del parámetro, podemos eliminar el parámetro.

Cada recta del plano puede parametrizarse como $P(t) = (a,b) + t(c,d)$ donde (a, b) es un punto de la recta y (c,d) es un vector en la dirección de la recta. Las coordenadas del punto $P(t)$ son
$x = a + tc$, $y = b + td$.

Si despejamos t en ambas ecuaciones e igualamos, habremos eliminado el parámetro y obtenemos una ecuación cartesiana de la recta en la forma:

$$dx - cy = ad - bc$$

Otra forma de eliminar el parámetro, es despejarlo para una de las variables y sustituirlo en la ecuación de la otra variable.

Por ejemplo: Una recta $R(t) = (3{,}2) + t(2{,}-1)$ puede definirse con las ecuaciones paramétricas:

$$x = 2t + 3$$
$$y = 2 - t$$

Si despejamos t en la ecuación de y, nos queda:
$t = 2 - y$

Si sustituimos este valor en la ecuación de x, tenemos que: $x = 2(2-y) + 3 = 4 - 2y + 3$

Por lo tanto, tenemos que la ecuación cartesiana de la recta es $x + 2y = 7$

o puesto en la forma de punto pendiente
$y = -x/2 + 3.5$

Conclusiones

En el estudio de las ecuaciones para la recta, hemos explorado diferentes formas de representar su comportamiento matemático, mediante **ecuaciones paramétricas** y **ecuaciones cartesianas**, cada una con sus propias características y aplicaciones.

Las **parametrizaciones** permiten expresar los puntos de la recta de manera **explícita**, asignando un valor a un parámetro que genera directamente un punto en la recta. Esto resulta especialmente útil en contextos donde se requiere describir trayectorias o movimientos, como en cinemática o gráficos computacionales.

Por otro lado, las **ecuaciones cartesianas** representan la recta de forma **implícita**, estableciendo una relación algebraica entre las coordenadas de sus puntos. Para determinar un punto específico, es necesario resolver la ecuación, lo que resulta útil en el análisis estructural de rectas y en la intersección con otras figuras geométricas.

La elección entre una parametrización o una ecuación cartesiana depende del problema que se quiera abordar. Mientras que las ecuaciones paramétricas facilitan la descripción de movimientos y trayectorias, las ecuaciones cartesianas ofrecen una forma más estructurada de analizar la geometría de la recta en el plano. Ambas representan herramientas fundamentales en la geometría analítica y su comprensión permite abordar una gran variedad de problemas matemáticos y físicos.

D. Actividad: Mira el siguiente video para aprender como ingresar ecuaciones paramétricas en Geogebra. Replica alguna de las ecuaciones paramétricas de la recta que hemos visto hasta el momento.

Para realizar la actividad será necesario utilizar la calculadora gráfica de Geogebra, disponible en https://www.geogebra.org/calculator

¿SABÍAS QUÉ?...

¿Sabías que las ecuaciones paramétricas y cartesianas se usan en animaciones 3D, diseño de rutas de GPS y simulaciones físicas? Gracias a ellas, es posible modelar trayectorias de objetos en movimiento y crear gráficos realistas en videojuegos y efectos especiales.

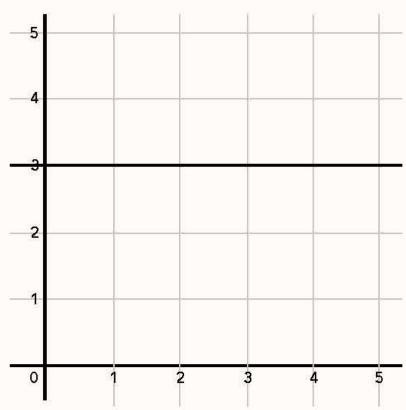
Trabajo independiente

5E Elaborar

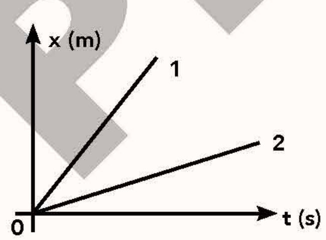
E. Sigue las instrucciones en los siguientes ejercicios:

1. Determina si los puntos A (-8, 1) y B (2,5) pertenecen a la recta definida por las ecuaciones:

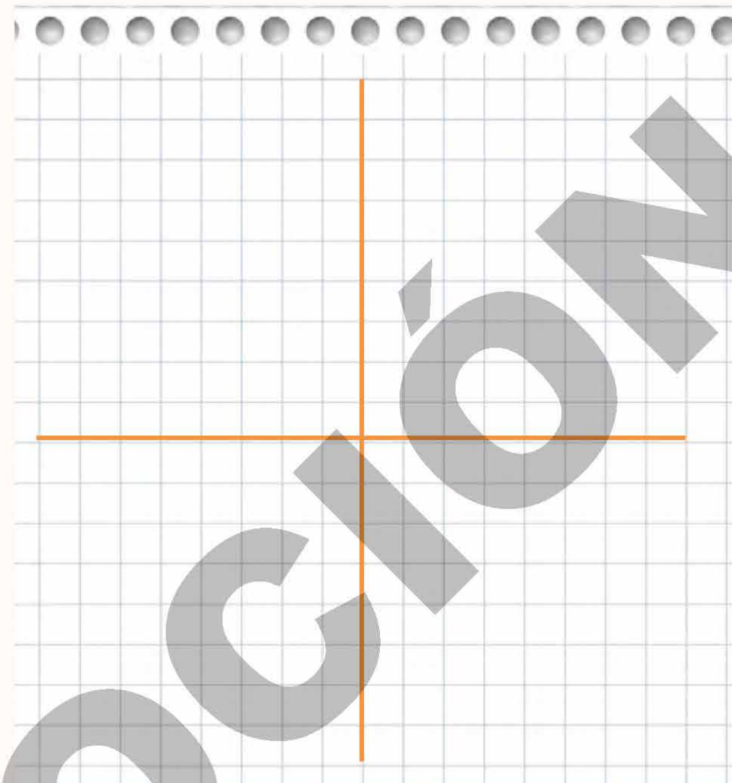
2. La gráfica representa el tiempo (s) vs. velocidad (m/s) de un objeto. Calcula analíticamente la distancia que recorre el objeto en 5 s.



3. ¿Cuál de los dos movimientos representados tiene mayor velocidad?, ¿explica por qué?



4. Una recta pasa por el punto A (-1, 3) y tiene un vector director (2, 5). Traza su gráfica y escribe sus ecuaciones paramétricas y cartesianas



5. Encuentra un vector director a una recta con pendiente m=1/3 y que pasa por el punto A(1,1) y escribe sus ecuaciones paramétricas.

Evaluar 5E

F. Con los conocimientos adquiridos en esta progresión, responde a cada pregunta.

Test de componentes de una recta

Escala de Respuestas:

Si: Manejo los conceptos con naturalidad y los puedo aplicar en situaciones reales. (3 puntos)
Regular: Entiendo los conceptos, más me cuesta aplicarlos para resolver problemas (2 puntos)
No: No entiendo los conceptos. (1 puntos)

Respuestas libres

1. Sé describir cualitativamente los distintos tipos de trayectorias.

Si Regular No

2. ¿Entiendo el principio de parámetro dentro de este tipo de ecuaciones?

Si Regular No

3. ¿Entiendo por qué el tiempo suele ser el parámetro para trayectorias planares?

Si Regular No

Puntuación:

Suma tus respuestas y evalúa la comprensión de esta progresión:
8-9 Comprensión de componentes de una recta, óptima.
6-7 Comprensión de componentes de una recta, moderada, pero puede mejorar.
3-5 Comprensión de componentes de una recta, baja, considera tomar una asesoría.

¿Cuál fue tu resultado? ¿Qué tema de esta progresión te gustaría reforzar?

Respuestas libres

En equipos de 3 personas, comparen sus respuestas y discutan los temas que necesiten reforzar. Describe brevemente las conclusiones o puntos importantes que te ayuden a entender mejor el tema.

Respuestas libres