Temas Selectos de Matemáticas I

Edición revisada 2026
ISBN: 978-607-8973-36-1

José Ma. Morelos No.18, Col. Pilares, C.P. 52179, Metepec, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro número: 4041
Contacto: 800 450 7676
Correo: contacto@deltalearning.com.mx

deltalearning.com.mx

Dirección editorial: Delta Learning®

Editor en jefe: Zito Octavio Alejandre Rosas

Autor: Josué Espinoza Rangel

Correctora: María Elena Alcántara Castro

Diseño: Sandra Ortiz y el equipo de Argonauta Comunicación

Portada: Elio Teutli Cortés

Imágenes: Adobe Stock

Producción: Lizbeth López Reyes

Impreso en México

Presentación

Bienvenidos al libro ***Temas Selectos de Matemáticas I***. Esta obra constituye una herramienta esencial para estudiantes que desean fortalecer su razonamiento matemático y su habilidad para resolver problemas con eficacia. Alineado con las categorías y objetivos delineados en el programa de estudios del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior, el propósito principal es equipar a los estudiantes con las destrezas necesarias para aplicar conceptos matemáticos en contextos reales, abordando las problemáticas complejas para contar con diversas visiones y perspectivas de las Matemáticas, desde la ciencia, las artes y las humanidades.

Este libro está organizado en tres secciones, cada una compuesta por tres progresiones temáticas que exploran aspectos fundamentales de Temas Selectos de Matemáticas. Cada progresión se centra en aspectos específicos de este recurso sociocognitivo, lo que facilita una comprensión profunda y su aplicación práctica en diversos contextos.

Además de ofrecer una base teórica sólida, se presentan numerosos ejemplos prácticos que ayudan a los estudiantes a comprender y aplicar conceptos matemáticos de manera efectiva. También va más allá de la teoría al incluir una variedad de actividades complementarias que enriquecen el proceso de aprendizaje, promoviendo la aplicación transversal de conocimientos, el desarrollo de habilidades socioemocionales y la integración de la tecnología a través de actividades como realidad aumentada y códigos QR.

Este libro aboga por una metodología STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas), la cual fomenta la exploración de temas interdisciplinarios. Los estudiantes no sólo adquieren conocimientos matemáticos, sino que también comprenden cómo estos se relacionan con otras disciplinas y aplicaciones en la vida real.

Temas Selectos de Matemáticas I se presenta como una herramienta completa y actualizada que permite a los estudiantes desarrollar habilidades esenciales de pensamiento matemático y aplicar conceptos en situaciones de la vida real. Con su enfoque en actividades complementarias, integración tecnológica y metodología STEAM, este libro proporciona a los estudiantes las herramientas necesarias para el éxito en el mundo matemático y más allá.

La Nueva Escuela Mexicana

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) tiene como principio fundamental que la educación sea entendida para toda la vida bajo el concepto de aprender a aprender, con actualización continua, adaptación a los cambios y aprendizaje permanente con el compromiso de brindar calidad en la enseñanza.

En la Editorial Delta Learning tenemos como misión crear materiales educativos de calidad, que cumplan los fundamentos del modelo educativo vigente de la Educación Media Superior, adoptando a la NEM como un eje rector en el diseño de nuestros libros, con el objetivo de promover aprendizajes de excelencia, inclusivos, pluriculturales, colaborativos y equitativos durante la formación de los bachilleres.

Haciendo suyo el reto, la Editorial Delta Learning desarrolla los contenidos de cada uno de sus ejemplares con los siguientes Principios que fundamentan la NEM:

Fomento de la identidad con México. El amor a la Patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso con los valores plasmados en la Constitución Política.

Responsabilidad ciudadana. El aceptar los derechos y deberes personales y comunes, respetar los valores cívicos como la honestidad, el respeto, la justicia, la solidaridad, la reciprocidad, la lealtad, la libertad, la equidad y la gratitud.

Honestidad. Es un compromiso fundamental para cumplir con la responsabilidad social, lo que permite que la sociedad se desarrolle con base en la confianza y en el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.

Participación en la transformación de la sociedad. El sentido social de la educación implica construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superen la indiferencia y la apatía para lograr la transformación de la sociedad en conjunto.

Respeto de la dignidad humana. El desarrollo integral del individuo promueve el ejercicio pleno y responsable de sus capacidades, el respeto a la dignidad y derechos humanos de las personas es una manera de demostrarlo.

Promoción de la interculturalidad. La comprensión y el aprecio por la diversidad cultural y lingüística, por el diálogo e intercambio intercultural sobre una base de equidad y respeto mutuo.

Promoción de la cultura de paz. La construcción de un diálogo constructivo, solidario y en búsqueda de acuerdos, permiten una solución no violenta a los conflictos y la convivencia en un marco de respeto a las diferencias.

Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente. El desarrollo de una conciencia ambiental sólida que favorezca la protección y conservación del medio ambiente, propiciando el desarrollo sostenible y reduciendo los efectos del cambio climático.

Estructura del libro

El presente libro se encuentra estructurado en 3 parciales en los cuales encontrarás desarrolladas las progresiones en apertura, desarrollo y cierre, asimismo cuenta con las siguientes secciones:

Evaluación diagnóstica: Esta se realiza al inicio del libro y tiene la finalidad de recuperar los conocimientos y habilidades necesarias para abordar los contenidos específicos de cada una de las progresiones de aprendizaje.

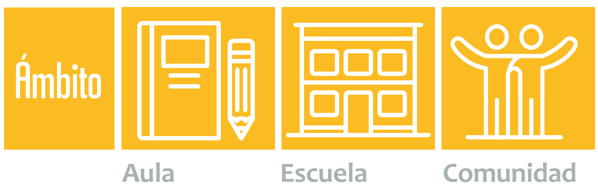
Actividades de aprendizaje: En las cuales pondrás a prueba los conocimientos y habilidades desarrollados en cada uno de los temas. Las actividades estarán vinculadas a los **ámbitos** del **Nuevo Modelo Educativo (NME)** de la **Escuela Media Superior (EMS)**, **aula – escuela – comunidad,** así como a alguno de los principios de la **Nueva Escuela Mexicana (NEM)** por ser este un programa de estudios orientado a recuperar el sentido de pertenencia a los valores que te identifican con nuestro país.

En cada actividad de aprendizaje encontrarás un tablero como el que se presenta a la derecha de este párrafo, en el cual podrás identificar a través de sus iconos específicos, tanto los **tres ámbitos del NME de la EMS**, como los **ocho principios de la NEM** a los que corresponda dicha actividad.

A continuación te mostramos las secciones de este tablero así como el significado de cada icono:

En la parte superior del tablero se encuentra una barra gris donde estará indicado el número de actividad.

A continuación verás una barra amarilla donde se indican los tres ámbitos (NME/EMS).



Por último, verás una sección de color naranja donde están indicados los principios de la NEM.

Fomento de la identidad con México

Responsabilidad ciudadana

Honestidad

Participación en la transformación de la sociedad

Respeto de la dignidad humana

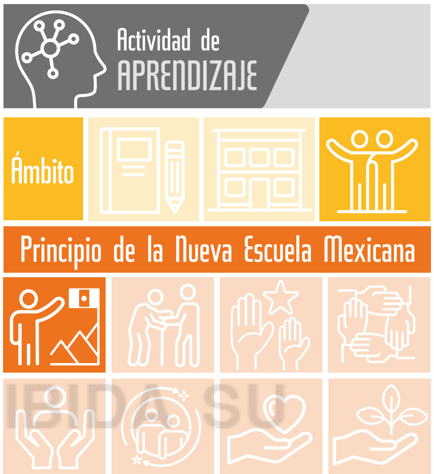
Promoción de la interculturalidad

Promoción de la cultura de paz

Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente

Para identificar el ámbito y principio correspondiente a cada actividad verás su respectivo icono en color amarillo y naranja y el resto de los iconos en un tono opaco.

En el ejemplo que ves a la derecha, el **ámbito** corresponde a la categoría **COMUNIDAD y el principio de la NEM corresponde al Fomento de la identidad con México.**



Actividades Transversales: Actividades orientadas a facilitar el proceso de vinculación de los conocimientos y habilidades de los recursos sociocognitivos con las distintas áreas de conocimiento.

Actividades QR interactivas: Actividades que asocian la tecnología con los conocimientos desarrollados en los temas, sólo se escanea el código QR y listo, se pueden reforzar los conocimientos y habilidades.

Realidad aumentada: Siempre es importante que todos los sentidos estén inmersos en el proceso de enseñanza – aprendizaje, las actividades de realidad aumentada dan una visión gráfica y vívida de los aprendizajes que se desean desarrollar en el libro.

Actividades Socioemocionales El curriculum ampliado no puede faltar dentro del contenido del texto, por ello, se incluyen actividades destinadas a desarrollar habilidades planteadas por los recursos socioemocionales del NME.

Adicionalmente podrás encontrar las siguientes secciones que te permitirán ampliar y afirmar los aprendizajes obtenidos en el curso.

Habilidad LECTORA

GLOSARIO

Evaluación DEL PARCIAL

BIBLIOGRAFÍA

Cuando visualices el siguiente ícono en alguna de las progresiones de aprendizaje, el código QR que aparezca junto a él tendrá una actividad perteneciente al Programa Aula Escuela Comunidad. Finalmente, te presentamos el ícono que señala el número de progresión al que pertence cada tema.

Proyecto Escolar Comunitario

Progresión 1

Progresiones

El libro se encuentra apegado al NME de la EMS y desarrolla cada una de las progresiones del programa de ***Temas Selectos de Matemáticas I***.

1. Explora investigaciones recientes en el campo de las ciencias de la complejidad a un nivel divulgativo con la finalidad de observar algunas nociones y aplicaciones de este paradigma. Es posible explorar los trabajos sobre criticalidad en las frecuencias que arrojan los electrocardiogramas, los cuales tienen por objetivo la detección temprana de enfermedades cardiovasculares, con esto se estaría teniendo un primer acercamiento a la fractalidad.
2. Observa fenómenos caóticos y no caóticos para distinguir y entender características como la predictibilidad y la sensibilidad a las condiciones iniciales. Es posible comparar, por ejemplo, el comportamiento de un péndulo simple contra el comportamiento de un péndulo doble y analizar fenómenos físicos estudiados en CNEyT como los cuerpos en caída libre utilizando *software* (comportamiento no caótico) y fenómenos como la turbulencia o la caída de un cuerpo sobre superficies irregulares.
3. Analiza funciones lineales y no lineales en el contexto de la modelación de fenómenos de interés, como la dinámica de poblaciones, e incorpora las nociones de órbita, periodo y comportamiento caótico. Cuando analiza sistemas dinámicos discretos considera la conjetura de Collatz, para observar que la Matemática es una ciencia viva que en ocasiones emplea la computación para generar evidencia a favor de ciertas afirmaciones.
4. Cuestiona y discute los problemas de conectividad y tráfico en las ciudades y viajes aeronáuticos a través del uso de conceptos y técnicas básicas de la geometría del taxista y la geometría esférica, respectivamente.

5. Explora los elementos básicos de la geometría fractal a través de la revisión de ejemplos físicos como el movimiento de una mota de polvo, las formas de las nubes, algunos de los “monstruos matemáticos” (e.g. el polvo de Cantor, el copo de nieve de Koch, curvas que llenan el plano, el conjunto de Julia, el conjunto de Mandelbrot, etcétera); además, revisa algunas de las aplicaciones de esta geometría en la industria fílmica y la medicina. Revisará la historia del padre de la geometría fractal, Benoît Mandelbrot, para hacer reflexiones de carácter socioemocional. Si la o el estudiante tiene familiaridad programando, es recomendable llevar a cabo un taller para producir fractales con computadora.
6. Investiga sobre problemáticas o interrogantes en las que sea fundamental analizar escalas y (auto) similitudes para una mejor comprensión, a través del uso de leyes de potencias, escalas logarítmicas y regresiones lineales. Algunas de las interrogantes que puede explorar son: ¿Cómo varía el gasto metabólico entre especies de mamíferos de diferente tamaño? ¿Los bebés son adultos a escala? ¿Por qué no existen árboles de cientos de miles de kilómetros de altura? ¿Cómo crecen las ciudades y las empresas?, entre otras.
7. Construye algoritmos y diagramas de flujo para resolver pequeños problemas como por ejemplo, la programación de un apagador de escalera haciendo uso de elementos mínimos de lógica simbólica. Se revisarán a nivel divulgativo los avances y retos presentes de la computación tales como la ciberseguridad y la computación cuántica, la In-

teligencia Artificial o el problema del millón de dólares sobre los problemas de decisión NP-completos.

8. Explora los avances y los retos de la genómica, la ingeniería genética, la biología sintética y el medio ambiente desde la perspectiva de la complejidad para preguntarse y reflexionar por los orígenes de la humanidad, la vida y los posibles avances tecnológicos que nos permitirían tener una mejor calidad de vida.
9. Elabora un proyecto que involucre las ideas de complejidad para proponer alternativas, análisis o reflexiones que busquen abonar ideas a la solución de un problema de interés.

Índice

Pág.

PARCIAL 1
- **El pensamiento matemático en las ciencias** 13
- **Teoría del caos** 32
- **Aplicaciones de funciones lineales y no lineales** 45

PARCIAL 2
- **Sistemas de tráfico y conectividad** 61
- **La geometría fractal** 78
- **Funciones trascendentes en la ciencia** 102

PARCIAL 3
- **Algoritmos y diagramas de flujo** 123
- **Ingeniería genética y genómica** 135
- **Proyecto final usando STEM** 141

Evaluación DIAGNÓSTICA

1. Define qué es una función matemática y explica la diferencia entre una función lineal y una no lineal, proporcionando un ejemplo de cada una.

2. Explica el concepto de variable independiente y dependiente en una ecuación matemática. ¿Cómo se representan gráficamente estas variables en un plano cartesiano?

3. ¿Qué es una ecuación y qué tipo de problemas se pueden resolver? Menciona un ejemplo de aplicación.

4. ¿Qué significa el término "sistema de coordenadas cartesianas"? Explica cómo se utilizan para representar funciones y relaciones matemáticas.

5. Si una población crece un 5% cada año, ¿cuál será su valor después de 3 años si comienza con 1,000 individuos?

6. Explica qué es un modelo matemático. ¿Por qué son importantes los modelos matemáticos en la resolución de problemas en ciencias naturales y sociales?

7. Describe qué es una sucesión numérica. ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión aritmética y una sucesión geométrica? Proporciona un ejemplo de cada una.

8. Define el concepto de límite en el contexto del Cálculo. ¿Cómo se usa este concepto en el estudio de funciones?

9. Explica la diferencia entre un modelo determinista y uno estocástico. ¿Qué características hacen que un modelo sea considerado determinista o estocástico?

Categoría de aprendizaje:
C1. Procedural.

Subcategorías:
- Elementos aritmético – algebraicos.

Meta de aprendizaje:
- Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.

Categoría de aprendizaje:
- Procesos de intuición y razonamiento.

Subcategorías:
- Capacidad para observar y conjeturar.
- Pensamiento intuitivo.

Meta de aprendizaje:
- Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.

PARCIAL 1

Categoría de aprendizaje:
- Solución de problemas y modelación.

Subcategorías:
- Uso de modelos.
- Construcción de modelos.

Metas de aprendizaje:
- Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.
- Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.

Aprendizajes de trayectoria:
- Aplica procedimientos algorítmicos e interpreta sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Observa, intuye, conjetura y argumenta a favor o en contra de afirmaciones matemáticas tanto teóricas

como de aplicación en áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos o recursos socioemocionales, para debatir y contrastar ideas con sus pares.

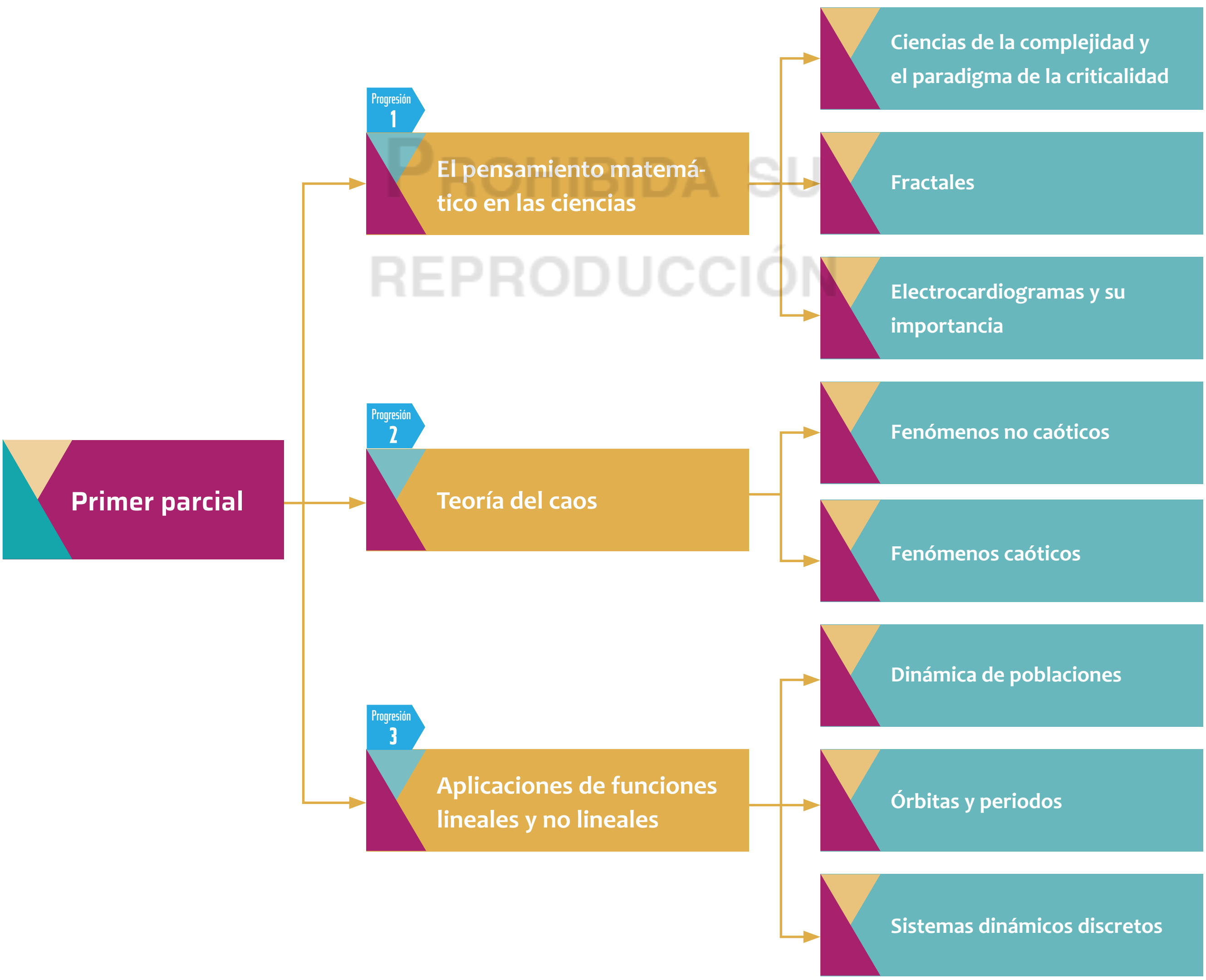
- Analiza situaciones y problemas, discerniendo las variables de interés para el estudio, así como también llevando a cabo la verificación requerida de las hipótesis para la aplicación de los objetos, métodos y conceptos matemáticos utilizados, con la finalidad de modelar fenómenos o resolver problemas.
- Describe, interpreta y comunica con claridad ideas, situaciones y fenómenos propios de la matemática, de las ciencias naturales, experimentales, de la tecnología, de las ciencias sociales y de su entorno, empleando un lenguaje matemático riguroso.

Progresiones:

1. Explora investigaciones recientes en el campo de las ciencias de la complejidad a un nivel divulgativo con la finalidad de observar algunas nociones y aplicaciones de este paradigma. Es posible explorar los trabajos sobre criticalidad en las frecuencias que arrojan los electrocardiogramas, los cuales tienen por objetivo la detección temprana de enfermedades cardiovasculares, con esto se estaría teniendo un primer acercamiento a la fractalidad.
2. Observa fenómenos caóticos y no caóticos para distinguir y entender características como la predictibilidad y la sensibilidad a las condiciones iniciales. Es posible comparar, por ejemplo, el comportamiento de un péndulo simple contra el comportamiento de un péndulo doble y analizar fenómenos físicos estudiados en CNEyT como los cuerpos en caída libre utilizando *software* (comportamiento no caótico) y fenómenos como la turbulencia o la caída de un cuerpo sobre superficies irregulares.
3. Analiza funciones lineales y no lineales en el contexto de la modelación de fenómenos de interés, como la dinámica de poblaciones, e incorpora las nociones de órbita, periodo y comportamiento caótico. Cuando analiza sistemas dinámicos discretos considera la conjetura de Collatz, para observar que la Matemática es una ciencia viva que en ocasiones emplea la computación para generar evidencia a favor de ciertas afirmaciones.

PRESENTACIÓN DEL PRIMER PARCIAL

En este primer parcial del curso ***Temas Selectos de Matemáticas I***, exploraremos diversos temas fundamentales que vinculan las Matemáticas con fenómenos naturales y científicos complejos. Estudiaremos conceptos clave como el pensamiento matemático en las ciencias, el paradigma de la criticalidad en los sistemas complejos y la teoría del caos, analizando cómo sistemas como el péndulo doble o la turbulencia en fluidos pueden exhibir comportamientos impredecibles. Además, abordaremos los modelos matemáticos para el crecimiento poblacional, tanto exponencial como logístico, y exploraremos aplicaciones prácticas como los fractales y la interpretación de electrocardiogramas. A lo largo de este parcial, los estudiantes tendrán la oportunidad de aplicar estos conceptos a través de actividades de aprendizaje interactivas y ejercicios prácticos que fortalecerán su comprensión de los sistemas dinámicos, las órbitas y los periodos, así como de los sistemas dinámicos discretos y la conjetura de Collatz. Este parcial no sólo evaluará el conocimiento teórico, sino que también fomentará el desarrollo de habilidades para analizar y resolver problemas complejos.



Progresión 1

El pensamiento matemático en las ciencias

APERTURA

Las Matemáticas, en su esencia, son un lenguaje que nos permite describir y comprender los fenómenos del mundo que nos rodea. A lo largo de la historia, han sido una herramienta clave para el avance del conocimiento en múltiples disciplinas, desde la Física y la Química hasta la Biología y las Ciencias Sociales. Sin embargo, en el contexto actual de investigación, las Matemáticas han adquirido un papel aún más central, ayudando a descifrar sistemas complejos y dinámicos que antes resultaban inabordables.

Hoy en día, vivimos en una época marcada por la interconexión de sistemas y fenómenos que, a primera vista, pueden parecer caóticos e impredecibles. Sin embargo, detrás de esta aparente complejidad se esconden patrones y regularidades que las Matemáticas permiten identificar. Desde la modelación de la propagación de enfermedades en epidemiología hasta la predicción de comportamientos financieros, las herramientas matemáticas proporcionan un marco conceptual que facilita el análisis de estas dinámicas complejas.

En las investigaciones recientes, las Matemáticas no sólo ayudan a describir la realidad, sino que también permiten crear modelos predictivos y explorar escenarios futuros. Un claro ejemplo de esta evolución es el estudio de los sistemas biológicos, donde la fractalidad y la teoría del caos ayudan a comprender fenómenos como el comportamiento de los latidos del corazón o la transmisión de señales neuronales. Estas investigaciones, basadas en conceptos matemáticos avanzados, como la geometría fractal y los sistemas dinámicos, han abierto nuevas posibilidades para detectar enfermedades antes de que presenten síntomas clínicos.

Además, la relación entre las Matemáticas y la investigación moderna no se limita a las ciencias naturales. Las Matemáticas son fundamentales para analizar grandes volúmenes de datos en campos como la Sociología, la Ecología o incluso la inteligencia artificial, son útiles para identificar patrones emergentes y tomar decisiones informadas. La capacidad de modelar la complejidad del mundo moderno no sólo amplía nuestra comprensión, sino que también nos brinda herramientas poderosas para enfrentar los desafíos del futuro.

En esta actividad los estudiantes comprenderán las características de un sistema complejo, como la interacción entre componentes y el comportamiento emergente, mediante una simulación grupal que ejemplifica cómo pequeñas acciones individuales pueden generar un comportamiento colectivo inesperado o impredecible.

Materiales:

- Tarjetas o papeles pequeños con instrucciones (una para cada estudiante).
- Espacio amplio para moverse.

Procedimiento:

1. Explica a los estudiantes que un sistema complejo está compuesto por muchos elementos que interactúan entre sí y producen resultados inesperados que no pueden ser predichos por el comportamiento individual de los componentes. Estos sistemas se encuentran en diversas áreas como la Biología, la Economía, y la sociedad. Ejemplos de sistemas complejos son: una colonia de hormigas, el tráfico en una ciudad, o incluso el sistema climático.
2. A cada estudiante se le dará una tarjeta con instrucciones sencillas, que pueden incluir acciones como:
- "Camina hacia la persona más cercana."
- "Mantén una distancia de dos metros de cualquier persona que se acerque."
- "Copia el movimiento de la persona a tu izquierda."
- "Cambia de dirección cuando veas a alguien cambiar."
- "Mantente en movimiento constante sin tocar a nadie."
3. Todos los estudiantes deben comenzar parados en diferentes lugares del aula, y al iniciar la actividad, deben seguir estrictamente las instrucciones de su tarjeta. Nadie puede comunicar su instrucción a los demás.
4. Permite que los estudiantes sigan moviéndose por el espacio durante unos minutos. A medida que lo hacen, observa cómo los movimientos de cada estudiante comienzan a influir en los movimientos de los demás.
5. Es probable que emerjan patrones como personas que se agrupan, se alejan unas de otras o que toda la clase termine moviéndose en una dirección sin que nadie lo haya planeado.
6. Después de detener la simulación, pregunta a los estudiantes:
- ¿Qué sucedió durante la actividad? ¿Notaron algún patrón o comportamiento colectivo que surgió?
- ¿Cómo cambiaron sus movimientos a medida que reaccionaban a los demás?
- ¿Esperaban que los movimientos individuales resultaran en el comportamiento colectivo que observaron?
7. Relaciona las respuestas de los estudiantes con las características clave de un sistema complejo:

Interacción entre componentes: Cada uno de ellos, al seguir instrucciones simples, influenció el comportamiento de los demás.

Emergencia: Aunque nadie planeó el resultado final, surgieron patrones grupales o comportamientos colectivos.

No linealidad: Pequeños cambios en las decisiones individuales (como quién cambia de dirección primero) afectaron de manera desproporcionada el comportamiento global del grupo.

Adaptación: Los estudiantes adaptaron su comportamiento según las acciones de los demás.

8. Explica cómo esta simulación es un modelo simplificado de cómo funcionan los sistemas complejos en el mundo real. Por ejemplo: en una colonia de hormigas, cada hormiga sigue reglas simples, pero el resultado es un comportamiento emergente, como la creación de caminos óptimos hacia la comida. En el tráfico de una ciudad, cada conductor sigue reglas sencillas, pero el resultado puede ser atascos impredecibles o un flujo de tráfico eficiente. En la economía, los consumidores y productores toman decisiones individuales que, en conjunto, crean fluctuaciones en el mercado. ¿Pueden pensar en otros ejemplos de sistemas complejos en su vida diaria?

DESARROLLO

Ciencias de la complejidad y el paradigma de la criticalidad

Las *ciencias de la complejidad* son un campo interdisciplinario que estudia cómo surgen comportamientos y estructuras complejas a partir de la interacción de componentes simples dentro de un sistema. A diferencia de los *sistemas simples*, donde su comportamiento puede predecirse fácilmente, los sistemas complejos presentan propiedades emergentes que no se pueden explicar únicamente observando sus partes individuales. Estos sistemas se encuentran en diversos ámbitos, como la Biología, la Física, la Economía y la sociedad, y se caracterizan por la interdependencia de sus elementos, la no linealidad de sus interacciones y la capacidad de adaptarse y evolucionar. Ejemplos incluyen desde el clima y los ecosistemas, hasta el tráfico vehicular y el funcionamiento del cerebro.

Características de los sistemas complejos

Los sistemas complejos presentan varias características distintivas que los diferencian de los sistemas simples.

Interacción entre componentes

Uno de los pilares de las ciencias de la complejidad es la interacción entre los componentes. En estos sistemas, cada componente sigue reglas sencillas que, al combinarse, influyen en el comportamiento de los demás.

Ejemplo

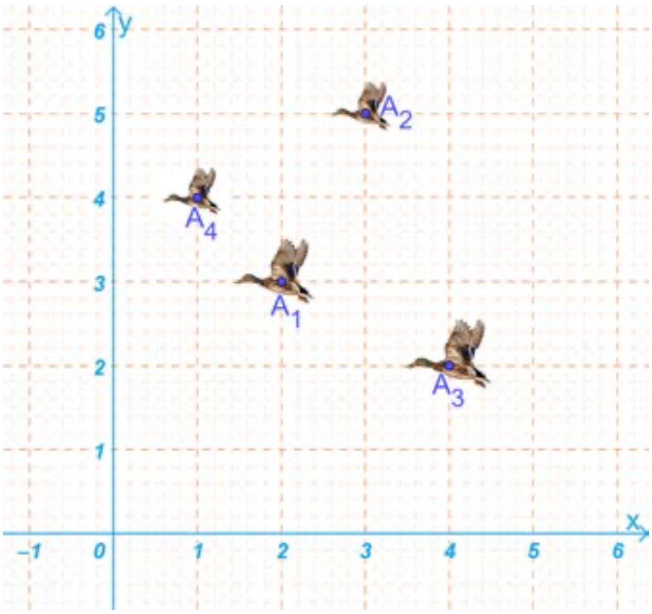
Una bandada de aves vuela en grupo, siguiendo reglas simples de interacción entre sus miembros. Cada ave se mueve de acuerdo a la posición y masa de sus compañeras cercanas, de manera que el movimiento de cada una se ve influenciado por las siguientes reglas:

1. **Cohesión:** Cada ave se mueve hacia el centro de masa de sus vecinas cercanas, manteniéndose a una distancia promedio de hasta 5 metros.
2. **Separación:** Si otra ave se encuentra a menos de 1 metro, el ave central se mueve para evitar una posible colisión.
3. **Alineación:** Cada ave ajusta su dirección para coincidir con la dirección promedio de las vecinas cercanas.

Para simplificar, ignoraremos las reglas de separación y alineación para centrarnos en el cálculo del centro de masa, al cual el ave central se dirige de acuerdo a la regla de cohesión.

Supongamos que un ave central está influenciada por 4 vecinas en las siguientes posiciones y masas:

- Ave 1: posición (2, 3), masa 2 kg
- Ave 2: posición (3, 5), masa 1.5 kg
- Ave 3: posición (4, 2), masa 2.5 kg
- Ave 4: posición (1, 4), masa 1 kg



Gráfica 1 Distribución de las 4 aves cercanas.

La posición inicial del ave central es (0,0). Calcularemos la posición de su próximo movimiento hacia el centro de masa de estas aves cercanas.

¿Cuál es el centro de masa de las 4 vecinas desde el punto de vista del ave central, considerando las masas de cada ave?

Si el ave central se desplaza un 50 % de la distancia hacia el centro de masa, ¿cuáles son sus nuevas coordenadas?

Para calcular el centro de masa ponderado por las masas de las aves vecinas, usamos la siguiente ecuación:

$$x_{CM} = \frac{\sum(m_i x_i)}{\sum m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum(m_i y_i)}{\sum m_i}$$

donde:

- m_i es la masa del ave i
- x_i e y_i son las coordenadas del ave i,
- $\sum m_i$ es la suma de las masas de todas las aves vecinas.

Ahora sustituyamos los valores correspondientes:

$$x_{CM} = \frac{2(2) + 1.5(3) + 2.5(4) + 1(1)}{2 + 1.5 + 2.5 + 1} = \frac{19.5}{7} \approx 2.78$$

$$y_{CM} = \frac{2(3) + 1.5(5) + 2.5(2) + 1(4)}{2 + 1.5 + 2.5 + 1} = \frac{22.5}{7} \approx 3.21$$

La posición del centro de masa entonces se encuentra en C_M (2.78,3.21)

Ahora encontraremos la distancia entre la posición inicial del ave central y el centro de masa.

Utilizamos la ecuación de la distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(2.78 - 0)^2 + (3.21 - 0)^2} = \sqrt{7.76 + 10.33} \approx 4.25$$

Si el ave central se desplaza el 50 % de esta distancia hacia el centro de masa, el desplazamiento efectivo es:

$$Desplazamiento = \frac{4.25}{2} \approx 2.13$$

Para obtener las nuevas coordenadas del ave central después del desplazamiento, multiplicamos el factor de desplazamiento por la razón de las coordenadas del centro de masa:

$$x_f = 0 + 2.13\left(\frac{2.78}{4.25}\right) \approx 1.39$$

$$y_f = 0 + 2.13\left(\frac{3.21}{4.25}\right) \approx 1.60$$

La coordenada final del ave central después de su ajuste hacia el centro de masa del grupo es (1.39,1.60)

En este ejemplo, observamos cómo la interacción entre componentes en un sistema complejo puede ser modelada matemáticamente considerando factores como la posición y la masa. El ave central, influenciada por sus vecinas, ajusta su dirección hacia un centro de masa que cambia constantemente según las características y ubicaciones de los otros elementos. Esta interacción genera patrones colectivos a partir de reglas simples, lo cual es una característica esencial de los sistemas complejos.

Sin embargo, no todos los problemas de interacción en sistemas complejos pueden resolverse usando las mismas fórmulas o métodos. En sistemas donde la interacción es dinámica y múltiples factores (como velocidad, ambiente, reglas específicas, o propiedades emergentes) influyen en los componentes, los enfoques deben adaptarse. En algunos casos, factores como la comunicación directa, las restricciones ambientales, o incluso el "aprendizaje" de los componentes (como sucede en los sistemas adaptativos) requieren modelos más avanzados, como simulaciones basadas en algoritmos, teoría de redes, o modelos estocásticos. Cada sistema demanda un enfoque único para capturar con precisión la complejidad de sus interacciones.

Emergencia

De esta interacción surgen fenómenos llamados propiedades emergentes. La emergencia se refiere a la aparición de patrones o comportamientos grupales que no estaban planeados ni coordinados por ninguna entidad central. Aunque cada componente del sistema sigue reglas locales sencillas, el sistema en su conjunto exhibe comportamientos que no se pueden reducir a las decisiones individuales.

Ejemplo

En una carretera, los vehículos se mueven en una fila a lo largo de un tramo recto. Cada vehículo ajusta su velocidad basándose únicamente en su distancia con respecto al vehículo de adelante, de acuerdo a una regla simple: si el vehículo de adelante está a menos de 20 metros, el vehículo actual reducirá su velocidad un 15 %. Si está a más de 20 metros, mantendrá su velocidad. No existe una coordinación entre vehículos para mantener el tráfico fluido.

Supongamos que inicialmente los vehículos A, B, C y D están en fila y cada uno sigue la regla mencionada para decidir su velocidad. Todos los vehículos viajan a la misma velocidad inicial de 80 km/h, y están separados por distancias variables en el tiempo $t = 0$:

Gráfica 2 Separación entre cada automóvil en $t = 0$.

Al inicio del tramo, el vehículo A ha reducido su velocidad un 15 % por una razón externa (por ejemplo, un obstáculo en la carretera). ¿En cuánto tiempo el vehículo B comenzará a reducir su velocidad también?

Primero debemos establecer los datos y hacer algunos cálculos básicos.

Datos iniciales

- Velocidad inicial de **A:** 80 km/h, reducida en 15 %.
  $v_A = 80(0.85) = 68\frac{km}{h}$
- Velocidad inicial de **B:** 80 km/h (antes de aplicar la regla).
- Distancia inicial entre **A** y **B**: 25 metros.

Queremos calcular el tiempo que tomará para que la distancia entre **A** y **B** disminuya a 20 metros, momento en el cual **B** aplicará la regla de separación (reducir su velocidad en un 15 %).

Para simplificar los cálculos, convertimos las velocidades de km/h a m/s:

$$v_A = \frac{68\ km}{h}\left(\frac{1\ h}{3600\ s}\right)\left(\frac{1000\ m}{1\ km}\right) \approx 18.88\frac{m}{s}$$

$$v_B = \frac{80\ km}{h}\left(\frac{1\ h}{3600\ s}\right)\left(\frac{1000\ m}{1\ km}\right) \approx 22.22\frac{m}{s}$$

El vehículo **B** va a una velocidad mayor que **A**, y la distancia entre ellos va disminuyendo a una **velocidad relativa** que es la diferencia entre las velocidades de **B** y **A**:

$$v_{relativa} = 22.22 - 18.88 = 3.33\frac{m}{s}$$

La distancia inicial entre los vehículos es de 25 metros, y queremos que se reduzca a 20 metros, por lo que la distancia que debe cerrarse es:

$$d = 25 - 20 = 5\,m$$

Con una velocidad relativa de $3.33\ m/s$, el tiempo t necesario para que **B** se acerque 5 metros a **A** es:

$$t = \frac{5\,m}{3.33\,m/s} = 1.5\,s$$

Después de aproximadamente 1.5 segundos, la distancia entre los vehículos **A** y **B** se reducirá a 20 metros, momento en el cual el vehículo **B** aplicará la regla de separación y reducirá su velocidad en un 15 %.

La regla simple para los vehículos es reducir la velocidad en un 15 % si el vehículo de adelante está a menos de 20 metros. Como la distancia entre **B** y **C** es de 18 metros, **C** reducirá su velocidad en un 15 % en $t = 0$.

La velocidad inicial de **C** es de 80 km/h. La reducción del 15 % se calcula así:

$$v_C = 80(0.85) = 68\frac{km}{h}$$

Por lo tanto, **C** viajará a $68\ km/h$ en $t = 0$.

Con **B** reduciendo su velocidad en t=1.5 s , **C** en t=0, **D** ajustará la suya en cuanto su distancia alcance los 20 metros de separación, lo cual ocurrirá en:

$$v_{relativa} = 22.22 - 18.88 = 3.33\frac{m}{s}$$

$$d = 22 - 20 = 2\,m$$

$$t = \frac{2\,m}{3.33\,m/s} = 0.6\,s$$

A pesar de que ningún vehículo está coordinando sus decisiones con los demás, la reducción de velocidad de **A** desencadena una serie de ajustes en los vehículos siguientes (**B**, **C** y **D**) que reduce la velocidad del grupo en una especie de "ola de desaceleración". Este efecto muestra un comportamiento emergente: una pequeña reducción de velocidad de un sólo vehículo (**A**) ha producido un cambio de velocidad en el comportamiento colectivo de la fila.

No linealidad

Otra característica clave de los sistemas complejos es la no linealidad. En estos sistemas, pequeños cambios en las decisiones o acciones individuales pueden tener efectos desproporcionados en el comportamiento global.

Ejemplo

Imagina que estamos modelando cómo se mueven las personas en un pasillo estrecho cuando alguien cambia ligeramente su dirección de movimiento. En sistemas no lineales, una variación mínima en el movimiento de una persona puede causar una reacción en cadena en la multitud, generando patrones grupales impredecibles.

1. **Situación:** En un pasillo estrecho, las personas caminan en línea recta hacia una salida.
2. **Cambio inicial:** Una persona, llamémosla persona **A**, decide cambiar su dirección de movimiento en sólo 5 grados hacia la derecha.
3. **Reacción de la multitud:** Este pequeño cambio afecta las personas cercanas, quienes deben ajustar sus trayectorias para evitar chocar.
4. **Propagación del cambio:** A medida que las personas ajustan sus trayectorias, el cambio inicial de dirección genera una onda de movimiento en cadena, que hace que cada persona en la multitud tome una dirección diferente a la planeada inicialmente.

Para comprender cómo un cambio pequeño se amplifica, consideremos lo siguiente:

- Suponemos que la persona **A** influye en la persona **B** (ubicada a 1 metro detrás).
- La influencia de **A** sobre **B** provoca que **B** también gire 5 grados hacia la derecha, aunque en una dirección levemente diferente debido a la distancia entre ellas.
- Esta influencia continúa propagándose en cadena, afectando a cada persona detrás en el pasillo.

1. Si la persona **A** cambia su dirección 5 grados, cada persona detrás ajusta su ángulo en proporción a la distancia.
   - Supondremos que, por cada metro de separación, el cambio de dirección se reduce en un 20 % respecto al ángulo anterior.
   - Entonces, si la persona **A** cambia en 5 grados, la persona **B** (a 1 metro) girará:

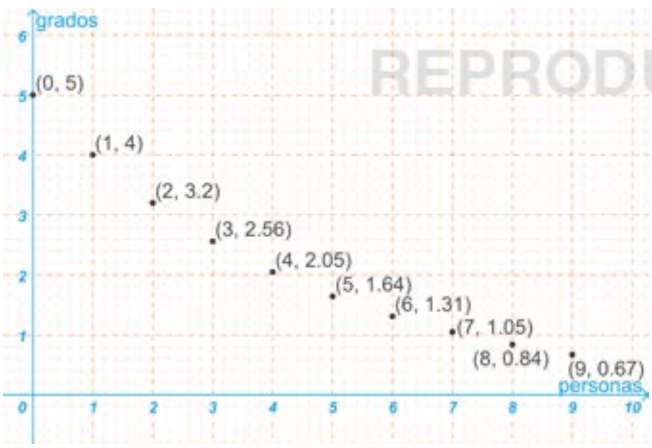
$$\angle B = 5(0.8) = 4°$$

- La persona **C** (ubicada a 2 metros de **A**) ajustará su dirección en:

$$\angle C = 4(0.8) = 3.2°$$

2. Continuamos esta propagación para las primeras 10 personas en la fila, observando cómo disminuye el ángulo con cada persona.

Persona	Distancia desde A (m)	Cambio de ángulo (grados)
A	0	5.0
B	1	4.0
C	2	3.2
D	3	2.56
E	4	2.05
F	5	1.64
G	6	1.31
H	7	1.05
I	8	0.84
J	9	0.67



Gráfica 3 Los cambios de ángulos presentan un comportamiento no lineal.

En este sistema no lineal, un cambio mínimo en la dirección de la persona **A** provoca una serie de ajustes en la trayectoria de las personas detrás. A pesar de que el cambio inicial es pequeño (5 grados), su efecto se amplifica en un patrón colectivo de desviaciones sucesivas. La no linealidad de este sistema radica en que pequeñas variaciones iniciales tienen efectos desproporcionados en el comportamiento global, lo que podría llevar a patrones complejos, como la formación de cuellos de botella o congestiones de personas en el pasillo.

Adaptación

Finalmente, los sistemas complejos suelen ser adaptativos. Esto significa que sus componentes tienen la capacidad de ajustar su comportamiento en función de la retroalimentación que reciben del entorno o de otros componentes.

Ejemplo

En un ecosistema, una población de presas y una población de depredadores viven en equilibrio. Sin embargo, el comportamiento de ambos grupos cambia adaptativamente en función de la cantidad de alimento disponible y la presencia del otro grupo.

1. Situación inicial:
   - Hay una población de presas, **P**, que se reproduce a un ritmo del 10 % por mes.
   - Hay una población de depredadores, **D**, que se reproduce a un ritmo del 5 % por mes cuando hay suficientes presas.
2. Retroalimentación y adaptación:
   - Si la población de depredadores supera el 60 % de la población de presas, las presas adaptan su comportamiento para evitar a los depredadores (por ejemplo, escondiéndose). Esto reduce su tasa de reproducción a la mitad (5 %).

$$r_p = \begin{cases} 0.10 & Si\ D \leq 0.6P \\ 0.05 & Si\ D > 0.6P \end{cases}$$

   - Si la población de presas alcanza la capacidad del ecosistema (un límite que llamaremos C = 200), los depredadores también se adaptan buscando alimento alternativo. Su tasa de reproducción entonces se reduce a la mitad (2.5 %).

$$r_d = \begin{cases} 0.05 & Si\ P < C \\ 0.025 & Si\ P \geq C \end{cases}$$

Dadas las condiciones iniciales $P_0 = 150$, $D_0 = 50$, y un límite de capacidad de 200 para las presas, ¿cuáles serán las poblaciones de presas y depredadores después de 6 meses?

Crecimiento de presas:

$$P_i = P_0(1 + r_p)$$

Donde r_p es la tasa de reproducción de las presas.

Crecimiento de depredadores:

$$D_i = D_0(1 + r_d)$$

Donde r_d es la tasa de reproducción de los depredadores.

Crearemos una tabla donde podamos organizar el comportamiento.

Mes	Condiciones iniciales	Condiciones de retroalimentación y adaptación	Crecimiento de presas
1	$P_0 = 150$ $D_0 = 50$	$P_0 < 200$ $D = 0.6(150) = 90$ $D_0 \leq 90$	$P_1 = (150)(1 + 0.1) = 165$ $D_1 = (50)(1 + 0.025) = 52.5 \approx 53$
2	$P_1 = 165$ $D_1 = 53$	$P_1 < 200$ $D = 0.6(165) = 99$ $D_1 \leq 99$	$P_2 = (165)(1 + 0.1) = 181.5 \approx 182$ $D_2 = (53)(1 + 0.05) = 55.65 \approx 56$
3	$P_2 = 182$ $D_2 = 56$	$P_2 < 200$ $D = 0.6(182) = 109.2$ $D_2 \leq 109.2$	$P_3 = (182)(1 + 0.1) = 200.2 \approx 200$ $D_3 = (56)(1 + 0.05) = 58.8 \approx 59$
4	$P_3 = 200$ $D_3 = 59$	$P_3 = 200$ $D = 0.6(200) = 120$ $D_3 \leq 120$	$P_4 = (200)(1 + 0.05) = 210$ $D_4 = (59)(1 + 0.025) = 60.47 \approx 60$
5	$P_4 = 210$ $D_4 = 60$	$P_4 \geq 200$ $D = 0.6(210) = 126$ $D_4 \leq 126$	$P_5 = (210)(1 + 0.05) = 220.5 \approx 221$ $D_5 = (60)(1 + 0.025) = 61.5 \approx 62$
6	$P_5 = 221$ $D_5 = 62$	$P_5 \geq 200$ $D = 0.6(221) = 132.6$ $D_5 \leq 132.6$	$P_6 = (221)(1 + 0.05) = 232.0 \approx 232$ $D_6 = (62)(1 + 0.025) = 63.55 \approx 64$

Después de 6 meses, las poblaciones alcanzan:

- Presas: 232
- Depredadores: 64

Este modelo muestra cómo las tasas de crecimiento de ambas poblaciones cambian en respuesta a la densidad de sus propias poblaciones y la de su contraparte, reflejando la capacidad adaptativa de los sistemas complejos. La retroalimentación y las adaptaciones permitieron evitar la sobrepoblación o la desaparición de alguna de las especies, manteniendo un equilibrio dinámico.

La complejidad: al borde entre el orden y el caos

La complejidad puede entenderse como un fenómeno que se manifiesta en la intersección entre el orden y el caos. Esta dualidad se convierte en un concepto clave para comprender cómo los sistemas complejos operan y evolucionan, y por qué son tan difíciles de predecir y controlar.

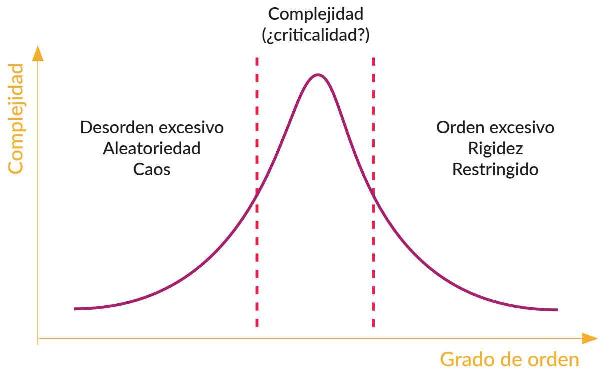


Ilustración 1 Representación de la complejidad.

El orden

El orden se refiere a la organización, la regularidad y la previsibilidad dentro de un sistema. En un estado ordenado, los elementos del sistema interactúan de tal manera que generan comportamientos y patrones claros y comprensibles. Por ejemplo, en un sistema mecánico simple, como un reloj, cada componente tiene un papel específico y predecible, lo que permite que el sistema funcione de manera coherente y predecible.

Ilustración 2 La maquinaria de un reloj suizo ejemplifica cómo el orden y la precisión en la interacción de sus componentes permiten un funcionamiento coherente y predecible, garantizando una medición del tiempo exacta y fiable.

Los sistemas ordenados tienden a seguir reglas claras y definidas, donde el comportamiento de cada parte es conocido y donde las interacciones son lineales. Esto significa que los resultados de las interacciones son predecibles y estables. Sin embargo, este orden puede ser frágil. Pequeñas perturbaciones o cambios en las condiciones pueden alterar el equilibrio del sistema y llevarlo a un estado de caos.

El caos

El caos, por otro lado, representa la aleatoriedad, la imprevisibilidad y la falta de un patrón discernible. En un sistema caótico, las interacciones entre los elementos son altamente sensibles a las condiciones iniciales. Este fenómeno, a menudo conocido como el "efecto mariposa", implica que pequeñas diferencias en el estado de un sistema pueden conducir a resultados radicalmente diferentes en el futuro. Un ejemplo clásico de caos es el clima: aunque existen patrones generales, es extremadamente difícil predecir el tiempo con precisión a largo plazo debido a la complejidad de las interacciones atmosféricas.

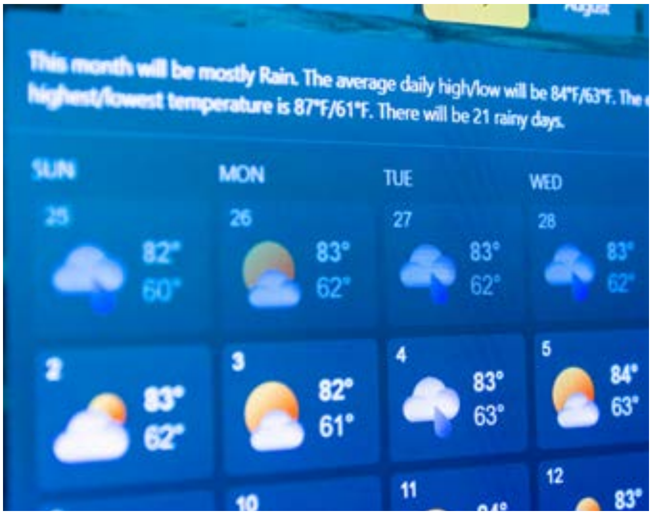


Ilustración 3 El clima es un ejemplo clásico de un sistema caótico, donde pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden generar grandes diferencias en los resultados a largo plazo. Aunque los patrones meteorológicos pueden parecer predecibles a corto plazo.