



Temas Selectos de Matemáticas I

Edición revisada 2026

ISBN: 978-607-8973-41-5

D.R. © 2019, Delta Learning®

José Ma. Morelos No.18, Col. Pilares, C.P. 52179, Metepec, Edo. de México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana

Registro número: 4041

Contacto: 800 450 7676

Correo: contacto@deltalearning.com.mx



deltalearning.com.mx

Todos los derechos reservados. No se permite la reproducción total o parcial de esta obra, ni su incorporación a un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio (electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros) sin autorización previa y por escrito del titular del copyright. La infracción de dichos derechos puede constituir un delito contra la propiedad intelectual.

Dirección editorial: Delta Learning®

Editor en jefe: Zito Octavio Alejandro Rosas

Autor: David Gómez Navas

Corrector: Manuel Besares Martínez

Diseño: Gabriel de la Rosa y el equipo de Argonauta Comunicación

Portada: Elio Teutli Cortés

Imágenes: Adobe Stock

Producción: Lizbeth López Reyes

Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces provistos en este libro no pertenecen a Delta Learning®. Por tanto, no tenemos ningún control sobre la información que los sitios web están dando en un momento determinado y por consiguiente no garantizamos la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque esta información se compila con gran cuidado y se actualiza continuamente, no asumimos ninguna responsabilidad de que sea correcta, completa o actualizada.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan las opiniones de los mismos y, a menos que se indique específicamente, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material en cualquiera de los sitios incluidos en este libro no está autorizada, ya que el material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos están reservados a sus respectivos propietarios y Delta Learning® no se responsabiliza por nada de lo que se muestra en los enlaces provistos.

Delta Learning® es una marca registrada propiedad de Delta Learning S.A. de C.V. Prohibida su reproducción total o parcial.

Impreso en México

Presentación



El libro ***Temas Selectos de Matemáticas I*** pertenece al recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático, tal como lo plantea el Nuevo Modelo Educativo de la Educación Media Superior para la Dirección General de Bachillerato (DGB) el cuál promueve la transformación de la sociedad a lo largo de un trayecto de formación académica de los cero a los 23 años de vida del estudiante, bajo las premisas de aprender a aprender, la actualización continua, la adaptación a los cambios y el aprendizaje permanente.

A lo largo del libro de ***Temas Selectos de Matemáticas I*** se desarrollan los contenidos y actividades de aprendizaje para lograr los siguientes aprendizajes de trayectoria.

Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.

Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana). Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.

Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

Joven estudiante, espero que disfrutes de los textos y actividades preparadas dentro del presente libro, todas ellas tienen la intención de establecer el aula como laboratorio social, permitiendo la transversalidad mediante los recursos sociocognitivos, socioemocionales y en conjunto con todas las áreas de conocimiento.



La Nueva Escuela Mexicana

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) tiene como principio fundamental que la educación sea entendida para toda la vida bajo el concepto de aprender a aprender, con actualización continua, adaptación a los cambios y aprendizaje permanente con el compromiso de brindar calidad en la enseñanza.



En la Editorial Delta Learning tenemos como misión crear materiales educativos de calidad, que cumplan los fundamentos del modelo educativo vigente de la Educación Media Superior, adoptando a la NEM como un eje rector en el diseño de nuestros libros, con el objetivo de promover aprendizajes de excelencia, inclusivos, pluriculturales, colaborativos y equitativos durante la formación de los bachilleres.

Haciendo suyo el reto, la Editorial Delta Learning desarrolla los contenidos de cada uno de sus ejemplares con los siguientes Principios que fundamentan la NEM:



Fomento de la identidad con México. El amor a la Patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso con los valores plasmados en la Constitución Política.



Responsabilidad ciudadana. El aceptar los derechos y deberes personales y comunes, respetar los valores cívicos como la honestidad, el respeto, la justicia, la solidaridad, la reciprocidad, la lealtad, la libertad, la equidad y la gratitud.



Honestidad. Es un compromiso fundamental para cumplir con la responsabilidad social, lo que permite que la sociedad se desarrolle con base en la confianza y en el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.



Participación en la transformación de la sociedad. El sentido social de la educación implica construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superen la indiferencia y la apatía para lograr la transformación de la sociedad en conjunto.



Respeto de la dignidad humana. El desarrollo integral del individuo promueve el ejercicio pleno y responsable de sus capacidades, el respeto a la dignidad y derechos humanos de las personas es una manera de demostrarlo.



Promoción de la interculturalidad. La comprensión y el aprecio por la diversidad cultural y lingüística, por el diálogo e intercambio intercultural sobre una base de equidad y respeto mutuo.



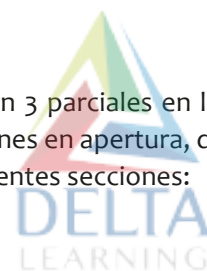
Promoción de la cultura de paz. La construcción de un diálogo constructivo, solidario y en búsqueda de acuerdos, permiten una solución no violenta a los conflictos y la convivencia en un marco de respeto a las diferencias.



Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente. El desarrollo de una conciencia ambiental sólida que favorezca la protección y conservación del medio ambiente, propiciando el desarrollo sostenible y reduciendo los efectos del cambio climático.

Estructura del libro

El presente libro se encuentra estructurado en 3 parciales en los cuales encontrarás desarrolladas las progresiones en apertura, desarrollo y cierre, asimismo cuenta con las siguientes secciones:



Evaluación diagnóstica: Esta se realiza al inicio del libro y tiene la finalidad de recuperar los conocimientos y habilidades necesarias para abordar los contenidos específicos de cada una de las progresiones de aprendizaje.



Actividades de aprendizaje: En las cuales pondrás a prueba los conocimientos y habilidades desarrollados en cada uno de los temas. Las actividades estarán vinculadas a los **ámbitos** del **Nuevo Modelo Educativo (NME)** de la **Escuela Media Superior (EMS)**, **aula – escuela – comunidad**, así como a alguno de los principios de la **Nueva Escuela Mexicana (NEM)** por ser este un programa de estudios orientado a recuperar el sentido de pertenencia a los valores que te identifican con nuestro país.

En cada actividad de aprendizaje encontrarás un tablero como el que se presenta a la derecha de este párrafo, en el cual podrás identificar a través de sus iconos específicos, tanto los **tres ámbitos del NME de la EMS**, como los **ocho principios de la NEM** a los que corresponda dicha actividad.

A continuación te mostramos las secciones de este tablero así como el significado de cada icono:

En la parte superior del tablero se encuentra una barra gris donde estará indicado el número de actividad.



A continuación verás una barra amarilla donde se indican los tres ámbitos (NME/EMS).



Aula

Escuela

Comunidad

Por último, verás una sección de color naranja donde están indicados los principios de la NEM.





Fomento de la identidad
con México



Responsabilidad
ciudadana



Honestidad



Participación en la transformación
de la sociedad



Respeto de la dignidad
humana



Promoción de la
interculturalidad



Promoción de la
cultura de paz



Respeto por la naturaleza y
cuidado del medio ambiente

Para identificar el ámbito y principio correspondiente a cada actividad verás su respectivo icono en color amarillo y naranja y el resto de los iconos en un tono opaco.

En el ejemplo que ves a la derecha, el **ámbito** corresponde a la categoría **COMUNIDAD** y el **principio de la NEM** corresponde al **Fomento de la identidad con México**.



PROHIBIDA SU
REPRODUCCIÓN



Actividades Transversales: Actividades orientadas a facilitar el proceso de vinculación de los conocimientos y habilidades de los recursos socio-cognitivos con las distintas áreas de conocimiento.



Actividades QR interactivas: Actividades que asocian la tecnología con los conocimientos desarrollados en los temas, sólo se escanea el código QR y listo, se pueden reforzar los conocimientos y habilidades.



Realidad aumentada: Siempre es importante que todos los sentidos estén inmersos en el proceso de enseñanza – aprendizaje, las actividades de realidad aumentada dan una visión gráfica y vívida de los aprendizajes que se desean desarrollar en el libro.



Actividades Socioemocionales El curriculum ampliado no puede faltar dentro del contenido del texto, por ello, se incluyen actividades destinadas a desarrollar habilidades planteadas por los recursos socioemocionales del NME.

Adicionalmente podrás encontrar las siguientes secciones que te permitirán ampliar y afirmar los aprendizajes obtenidos en el curso.



Cuando visualices el siguiente ícono en alguna de las progresiones de aprendizaje, el código QR que aparezca junto a él tendrá una actividad perteneciente al Programa Aula Escuela Comunidad. Finalmente, te presentamos el ícono que señala el número de progresión al que pertenece cada tema.



Progresiones

El libro se encuentra apegado al NME de la EMS y desarrolla cada una de las progresiones del programa de **Temas Selectos de Matemáticas I**.

1. Resuelve situaciones-problema contextualizadas, a través de la exploración y desarrollo de elementos básicos de la geometría y trigonometría, tales como, ángulos, semejanza, congruencia y autosemejanza, observando la relación entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo como razones trigonométricas, destacando la importancia de entes abstractos en la vinculación con otras Unidades de Aprendizaje Curricular, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas.
2. Explora algunas leyes y relaciones matemáticas que permitan dar solución a problemas cotidianos a través de la geometría y trigonometría, considera el recíproco del Teorema de Pitágoras, la Ley de Senos, la Ley de Cosenos como una generalización del Teorema de Pitágoras, la circunferencia unitaria, explorando razonamientos y demostraciones sencillas facilitando la formalización de los conceptos.
3. Examina el planteamiento de la Geometría Euclidiana, a través del desarrollo histórico de los postulados de Euclides, particularmente “el quinto postulado de Euclides” y considera escenarios donde no se cumple el mismo, analizando las diferencias entre la Geometría Euclidiana y no Euclidianas considerando ejemplos reales como el modelo terráqueo de la tierra, los viajes aeronáuticos y el estudio de la astronomía, lo cual permita observar cómo estas han sido de utilidad en la solución de problemas reales.
4. Resuelve problemas de su entorno mediante la ecuación de la línea recta según necesite (punto-pendiente, pendiente ordenada al origen, dos puntos) y considera sistemas de ecuaciones lineales los cuales resuelve usando el método de Cramer o el método de Gauss-Jordan para resolver matrices y hallar su solución de manera que el estudiantado pueda analizar, comprobar e interpretar sus hallazgos y resultados.
5. Explora la parábola como sección cónica, a través de la modelación y solución de situaciones-problema presentes en su entorno y en otras Unidades de Aprendizaje Curricular, reflexionando la manera en qué entes abstractos de la matemática se encuentran presentes en la naturaleza y le permiten describirla, haciendo uso de herramientas tecnológicas disponibles.
6. Analiza a la circunferencia desde la perspectiva de la Geometría Analítica como una sección cónica, considerando el planteamiento y modelación de problemáticas reales a las cuales da solución usándola como herramienta, haciéndose consciente de la importancia de esta curva en el estudio de estructuras que están presentes en su entorno, usando herramientas tecnológicas a su disposición para comprobar y compartir sus resultados con sus pares.
7. Aplica la Elipse como sección cónica para modelar y dar solución a problemáticas reales de su interés que provienen de otras Unidades de Aprendizaje Curricular, observando cómo esta curva está presente en fenómenos astronómicos y ópticos, de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos haciendo uso de métodos analíticos y/o herramientas tecnológicas disponibles.
8. Aplica la ecuación general de segundo grado para dos variables considerando la sección cónica según lo requiera, para modelar y dar solución a problemáticas contextualizadas de otras Unidades de Aprendizaje Curricular haciendo uso de herramientas tecnológicas disponibles.
9. Interpreta los fractales como entes matemáticos presentes en la naturaleza, las estructuras sociales y en su entorno, mediante la descripción de su definición y el conocimiento de algunos de los ejemplos más importantes, como el conjunto de Cantor, el Triángulo de Sierpinsky, el Copo de Nieve de Koch, el Conjunto de Mandelbrot, el Conjunto de Julia, el Conejo de Douady y analiza algunas propiedades de estos apoyándose de herramientas tecnológicas disponibles.

Índice

PARCIAL 1

• Geometría y trigonometría	13
• Leyes matemáticas	32
• Geometría euclidiana	42

PARCIAL 2

• Línea recta	61
• Parábola	91
• Circunferencia	107

PARCIAL 3

• Elipse	125
• Ecuaciones cuadráticas cónicas	137
• Matemáticas y fractales	147





A continuación, te pediremos que contestes las siguientes diez preguntas con la finalidad de medir tu conocimiento.

1. Son definidos como la unión de dos líneas que tienen un punto final común:

2. Si la suma contigua de sus medidas (m) da como resultado 180° , ¿de qué clase de ángulos se trata?

3. Si la suma de sus medidas contiguas (m) es igual a 90° , ¿qué tipo de nombre reciben estos ángulos?

4. ¿Qué nombre reciben aquellas líneas coplanares (líneas en el mismo plano) que nunca se cruzan?

5. Tipos de ángulos que comparten un vértice y un lado común entre ellos, pero no tienen puntos interiores en común:

6. Línea o segmento que atraviesa una curva y la interseca en dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) :

7. ¿Qué nombre reciben las líneas que se intersecan en ángulo recto?

8. Tipo de triángulo que posee 3 lados y 3 ángulos iguales:

9. Tipo de triángulo sin lados ni ángulos iguales:

10. Propiedad geométrica que hace referencia a la igualdad en tamaño y forma de los polígonos, aunque su posición u orientación sean distintas:



Categoría de aprendizaje:

C1. Procedural.

Subcategorías:

- S1. Elementos aritmético-algebraicos
- S2. Elementos geométricos

Meta de aprendizaje:

- C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.
- C1M2. Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.

- C1M3. Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.

Categoría de aprendizaje:

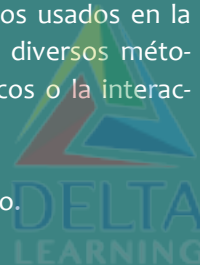
C2. Procesos de intuición y razonamiento.

Subcategorías:

- S1. Capacidad para observar y conjeturar.
- S2. Pensamiento intuitivo.
- S3. Pensamiento formal.

Meta de aprendizaje:

- C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.



PARCIAL 1

- C2M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.
- C2M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.

Categoría de aprendizaje:

C3. Solución de problemas y modelación.

Subcategorías:

- S1. Uso de modelos.
- S3. Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

Metas de aprendizaje:

- C3M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
- C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas.
- C3M4. Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.

Aprendizajes de trayectoria:

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia..
- Describe, interpreta y comunica con claridad ideas, situaciones y fenómenos propios de la matemática, de las ciencias naturales, experimentales, de la tecnología, de las ciencias sociales y de su entorno, empleando un lenguaje matemático riguroso.

Progresiones:

1. Resuelve situaciones-problema contextualizadas, a través de la exploración y desarrollo de elementos básicos de la geometría y trigonometría, tales como, ángulos, semejanza, congruencia y autosemejanza, observando la relación entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo como razones trigonométricas, destacando la importancia de entes abstractos en la vinculación con otras Unidades de Aprendizaje Curricular, promoviendo el uso de herramientas tecnológicas.
2. Explora algunas leyes y relaciones matemáticas que permitan dar solución a problemas cotidianos a través de la geometría y trigonometría, considera el recíproco del Teorema de Pitágoras, la Ley de Senos, y la Ley de Cosenos como una generalización del Teorema de Pitágoras, la circunferencia unitaria, explorando razonamientos y demostraciones sencillas facilitando la formalización de los conceptos.
3. Examina el planteamiento de la geometría euclidiana, a través del desarrollo histórico de los postulados de Euclides, particularmente “el quinto postulado de Euclides” y considera escenarios donde no se cumple el mismo, analizando las diferencias entre la geometría euclidiana y no euclidianas considerando ejemplos reales como el modelo terráqueo de la tierra, los viajes aeronáuticos y el estudio de la astronomía, lo cual permitirá observar cómo estas han sido de utilidad en la solución de problemas reales.



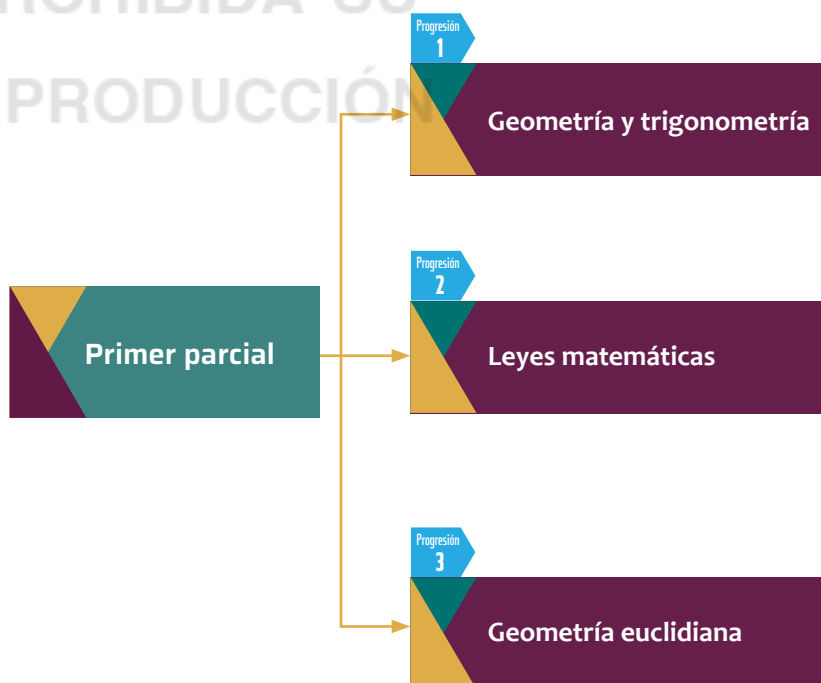
PRESENTACIÓN DEL PRIMER PARCIAL



Dentro de las matemáticas, la geometría es un área llena proporciones y relaciones espaciales que brindan riqueza y belleza dentro del área de estudio en las que se les aplique. Los registros de su aplicación matemática se remontan a los inicios de la civilización humana. Por ejemplo, los antiguos griegos eran conocedores de ciertas proporciones geométricas que les fueron de gran ayuda para comprender y medir su mundo, de ello que a través de la historia la geometría ha sido un pilar de la educación, la cual se enseña desde los niveles escolares más básicos hasta los más altos.

En este primer parcial del libro ***Temas Selectos de Matemáticas I***, buscaremos que el estudiante entre en contacto con las formas bidimensionales y su representación, así como que desarrolle la lógica deductiva necesaria para trabajar con diferentes elementos de la geometría.

Esperamos que el presente texto te sirva de ayuda para entrar en contacto con el mundo de la geometría al punto en el que logres apreciar realmente su utilidad dentro de las aplicaciones y actividades comunes de la vida diaria. Los contenidos específicos se pueden visualizar en el siguiente esquema.



Geometría y trigonometría



El concepto de **ángulo** es uno de los conceptos más importantes dentro de la geometría. Históricamente ha tenido un uso muy extendido en la construcción de grandes edificaciones que hasta la fecha son significativas para la humanidad, y ha tenido un uso práctico en la vida cotidiana de todas las personas. Por ejemplo, es del todo común que las personas dedicadas a ciencias como la física o la astrofísica empleen su conocimiento de los ángulos para obtener las medidas lineales y angulares al realizar un cálculo que lleve por buen camino al proyecto en el cual estén trabajando.

El **triángulo** es el más simple de todos los polígonos y es empleado en múltiples áreas del conocimiento humano gracias a sus propiedades geométricas. Por ejemplo, este es utilizado en áreas como el arte, en donde debido a su forma básica y visualmente atractiva fue utilizado como inspiración en los cuadros del pintor ruso Wassily Kandinsky. De igual manera, debido a su forma fuerte y estable, también ha sido utilizada múltiples veces por la arquitectura y la ingeniería en estructuras como puentes y edificios.

Pero ¿qué es un triángulo? y ¿cuáles son sus propiedades?

La palabra *triángulo* significa “tres ángulos”, y se define como “una figura plana formada por tres segmentos de línea y tres ángulos que se unen en tres puntos no colineales (es decir que no caen sobre la misma recta los tres)”. Cada uno de los tres puntos se llama vértice del triángulo y los segmentos se llaman lados del triángulo.



Figura A. En el edificio conocido como “El Pepinillo” creación del arquitecto Norman Foster, podemos ver claramente cómo se empleó intensivamente el triángulo para estructurar y dar forma a esta construcción.

Ángulos

Un ángulo se define como “la unión de dos líneas que tienen un punto final común”. Las dos líneas o segmentos se denominan *lados del ángulo* y el punto final común se llama *vértice del ángulo*.

En la figura 1, los segmentos \overline{BA} y \overline{BC} son los lados del ángulo y el punto B es el vértice del ángulo. El ángulo es simbolizado con el signo \angle , y para esta figura podemos nombrar al ángulo referenciando al número que se encuentra dentro de este como $\angle 1$, el cual se leerá como “ángulo 1”

Un ángulo también puede ser etiquetado con tres letras, una letra de un lado, una letra del otro lado y la letra del vértice. Recuerda que la letra del vértice está en el medio. De esta forma, también podremos nombrar al ángulo de la figura 1 como $\angle ABC$ o $\angle CBA$, en donde respectivamente se leerá como “ángulo ABC” o “ángulo CBA”. Otra forma de expresar un ángulo es simplemente nombrarlo por su vértice como $\angle B$. De esta forma, queda claro que en la figura 1 podremos nombrar al ángulo tanto por su vértice como por los criterios de un número como el de las tres letras, donde la letra del medio debe nombrar el vértice ($\angle 1 = \angle B = \angle ABC$).

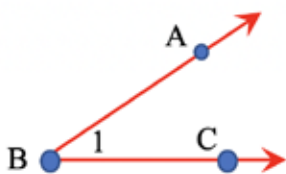


Figura 1. Ángulo $\angle ABC$

Cuando hablamos del $\angle B$, queda muy claro a qué ángulo nos referimos. Sin embargo, observemos la Figura 2. Si utilizáramos el criterio de nombrar a todos estos ángulos por la letra de su vértice cometeríamos una equivocación pues no es lo mismo:

$$\angle JMK \neq \angle JML \neq \angle KML$$

Y sin embargo, los tres ángulos referidos por separado podrían ser nombrados $\angle M$.

Notemos que en este caso en que se presentan distintos ángulos en una sola figura y que comparten vértice, debemos utilizar un criterio que los distinga adecuadamente.

El método correcto para nombrar a varios ángulos que comparten un mismo vértice es usar tres letras o un número, de forma que se distinga perfectamente de qué ángulo se está hablando. Por ejemplo, en la

figura 2 hay tres ángulos con vértice M. Para nombrar a cada uno en particular, debemos llamarlos de la siguiente forma:

El $\angle 2$ también podría llamarse como $\angle JMK$ o $\angle KMJ$.

Al $\angle 3$ también podría nombrarse como $\angle KML$ o $\angle LMK$.

Y al $\angle JML$ también podría llamarse $\angle LMJ$.

Tip. Recuerda que si dos o más ángulos comparten el mismo vértice, no podremos etiquetarlos usando la misma letra del vértice.

Para saber más

Un ángulo divide un plano en tres regiones distintas:

- El interior del ángulo.
- El ángulo en sí mismo.
- El exterior del ángulo.

En donde:

Los puntos Z y D se encuentran en la región interior del ángulo.

Los puntos C y T se encuentran en el ángulo.

El punto Y se encuentra en la región exterior del ángulo.

Siguiendo este razonamiento, los ángulos que se encuentren en la región interior de un ángulo serán conocidos como *ángulos internos*, mientras que los que se encuentren en la región exterior del ángulo serán llamados *ángulos externos*.

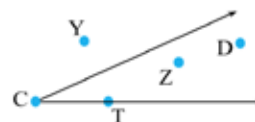
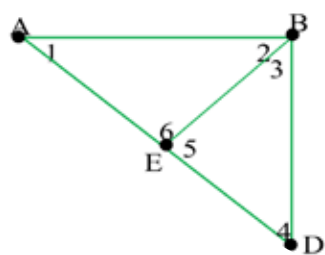


Figura. Regiones en un ángulo

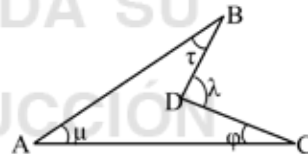
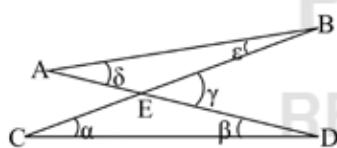


Ejercicio 1. Ya que sabes nombrar los ángulos, pongámoslo a prueba. A continuación, observa la siguiente figura, 1) Escribe los nombres de los ángulos que tienen por vértice el punto B. 2) Escribe la notación completa con letras de los $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$.

Figura. Regiones en un ángulo



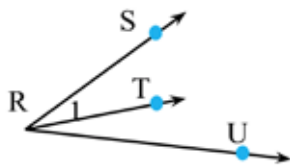
Ejercicio 2. Etiqueta los ángulos usando la información encontrada en las siguientes figuras.



Ángulo α : _____ o bien _____
 Ángulo β : _____ o bien _____
 Ángulo γ : _____ o bien _____
 Ángulo δ : _____ o bien _____
 Ángulo ϵ : _____ o bien _____

Ángulo μ : _____ o bien _____
 Ángulo τ : _____ o bien _____
 Ángulo ϕ : _____ o bien _____
 Ángulo λ : _____ o bien _____

Ejercicio 3. Con base en la siguiente figura, determina con una \checkmark si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F).



V F

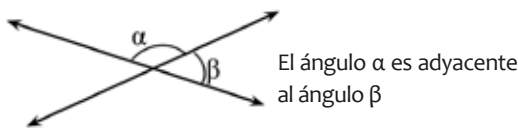
- | | | |
|--|-----|-----|
| 1. Cada uno de los ángulos mostrados en la figura anterior se puede etiquetar de más de una forma. | () | () |
| 2. El valor del ángulo $\angle SRT$ es el mismo que $\angle TRS$. | () | () |
| 3. La medida del ángulo 1 es igual a la medida de $\angle SRT$. | () | () |
| 4. Hay 3 ángulos diferentes que podrían etiquetarse como $\angle R$. | () | () |

Clasificación

Aprender acerca de los tipos de ángulos es importante, ya que forman una base para la resolución de problemas de mayor orden dentro de la geometría. Hay varios tipos de ángulos que se clasifican según la medida de la abertura del ángulo y según su posición respecto de otros ángulos. Comencemos por estudiar los diferentes tipos de ángulos según la forma y posición en que se relacionan con otros ángulos.

Ángulos adyacentes

Son un par de ángulos α y β con un lado común formado por dos líneas rectas que se cruzan.



Adyacente significa “junto a”, de modo que dos ángulos se llamarán adyacentes si estos tienen un lado común y sus otros lados son semirrectas complementarias con sentidos opuestos. Como ejemplo veamos los ángulos adyacentes VTS y UTV de la figura C.

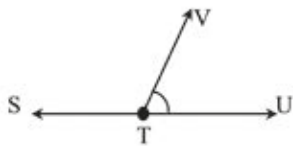


Figura C. Ángulos adyacentes VTS y UTV



Figura D. Ángulos adyacentes BCD y DCA

Otros ejemplos de ángulos adyacentes son los ángulos BCD y DCA mostrados en la figura D, los cuales tienen como vértice un punto C situado en la recta AB, entre los puntos A y B, que forma un segmento con un punto D que no se halla en la recta AB.

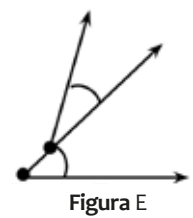
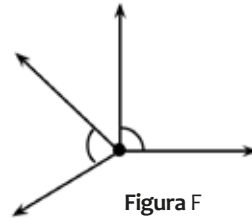
Podemos observar en la figura C cómo los ángulos BCD y DCA tienen el lado común CD y los lados CA y CB son semirrectas complementarias con sentidos opuestos de la recta AB, ya que los puntos A y B de estas semirrectas están separados por el punto de origen C.

Teorema. La suma de ángulos adyacentes es igual a 180° .

Al trabajar con ángulos adyacentes, algo sobre lo que tenemos que preguntarnos es si estos cumplen con los requisitos para que entren dentro de esta clasificación.

Por ejemplo, los ángulos que se encuentran en la figura E no cumplen con estas condiciones, pues a pesar de que dichos ángulos comparten un mismo lado no comparten el mismo vértice.

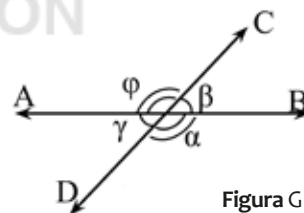
Otro caso es el de la figura F, en donde los ángulos sí comparten el mismo vértice, pero no comparten un lado común.



Ángulos verticales

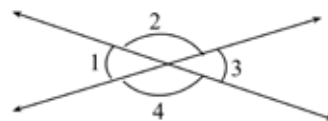
Se llaman *ángulos verticales* a aquellos ángulos opuestos uno al otro que se forman cuando dos líneas o semirrectas se cruzan.

Una de las particularidades sobre los ángulos verticales, es que cuando dos líneas se intersecan se forman 4 ángulos, de los cuales se formarán 2 pares de ángulos opuestos con valores congruentes (iguales). De esta forma los ángulos α y φ son iguales, y lo mismo para los ángulos β y γ , (ver la figura G).



Teorema. Los ángulos verticales son siempre iguales o congruentes. Los ángulos verticales siempre tienen la misma medida.

Ejemplo. Observa la siguiente figura y escribe cuáles de sus ángulos son ángulos verticales.



Solución:

- Los ángulos 1 y 3 son ángulos verticales, \therefore los ángulos 1 y 3 son congruentes y tienen la misma medida.
- Los ángulos 2 y 4 son ángulos verticales, \therefore los ángulos 2 y 4 son congruentes y tienen la misma medida.

Ángulos consecutivos

Los ángulos consecutivos son aquellos que comparten el mismo vértice y uno de sus lados (ver figura H).

De esta forma los ángulos AOB y BOC serán ángulos consecutivos.

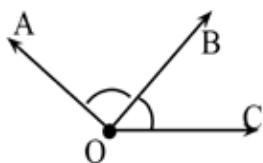


Figura H. Ángulos consecutivos AOB y BOC

De esta forma los ángulos AOB y BOC serán ángulos consecutivos.

Tip. A diferencia de los ángulos adyacentes, en los ángulos consecutivos las semirrectas que definen los lados no se encuentran en sentidos opuestos.

Otra forma de clasificación que encontramos en los ángulos se realiza por lo que vale la suma de sus ángulos. Dentro de esta clasificación encontramos a los ángulos suplementarios y complementarios.

Definición de ángulo suplementario.

- Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas (m) da como resultado 180° . Por lo tanto, si un ángulo A es suplementario a un ángulo B, entonces $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$, y cada ángulo se llama *suplemento* del otro ángulo.

Definición de ángulo complementario.

- Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90° . De esto, si un ángulo A es complementario a un ángulo B, entonces $m\angle A + m\angle B = 90^\circ$, y cada ángulo se llama *complemento* del otro ángulo.



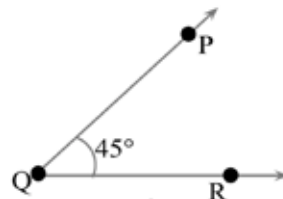
De esta forma, sea A un ángulo con una medida m igual a 45° (ver figura I), podemos determinar la medida del ángulo suplementario del ángulo A añadiendo los grados faltantes para completar los 180° , o podemos restar a 180° el valor de la medida del ángulo A, (ángulo suplementario = $180^\circ - m\angle A$), en donde para este caso en específico, el valor de la medida del ángulo suplementario será igual a 135° , (ver figura J).

Por otro lado, si deseamos obtener el ángulo complementario al ángulo A, debemos sumar un ángulo de medida de grados faltantes para obtener 90° . De esta forma, si el valor del ángulo A es igual a 45° , el valor de la medida del ángulo complementario será igual a 45° (ver figura K).

Por último, dentro de nuestro estudio sobre los tipos de ángulos, veamos a continuación la clasificación de los ángulos según la medida de su abertura.

Ángulo agudo

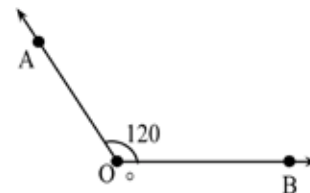
Un ángulo que mide menos de 90° se llama *ángulo agudo*. En la siguiente figura, el ángulo formado por la intersección de PQ y QR en el vértice Q forma un ángulo PQR que mide 45° . Por tanto, PQR es un ángulo agudo.



Ángulo obtuso

Se conoce como *ángulo obtuso* a un ángulo que mide más de 90° y menos de 180° . En otras palabras la medida del ángulo obtuso variará de 90° a 180° .

Un ejemplo de ángulo obtuso lo podemos observar en la siguiente figura, donde el segmento de línea AO se cruza con el segmento de línea OB en el punto O, formando el ángulo AOB que mide 120° , \therefore es un ángulo obtuso.



Tip. Si se desconoce la medida de un ángulo obtuso, pero en cambio se conoce la medida de su ángulo suplementario, uno de los métodos más sencillos para encontrar el valor de un ángulo obtuso es restando a 180° la medida del ángulo suplementario.
Medida de ángulo obtuso = $(180^\circ - \text{medida del ángulo suplementario})$

De esta forma, podremos obtener de forma inversa la medida de un ángulo agudo si extendemos la línea OB a un punto P para formar OP, ver figura N.

$$AOP = 180^\circ - AOB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

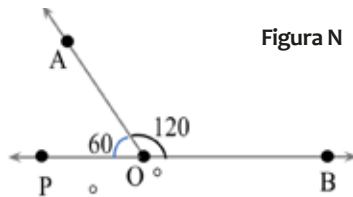


Figura N

Ángulo recto

Un ángulo igual a 90° se llama *ángulo recto*, el cual se forma cuando se cruzan dos líneas que son perpendiculares entre sí. En la figura O, la línea AB intersecta perpendicularmente a la línea CD, formando entre estas dos un ángulo α que mide 90° .

Como podemos deducir a partir de la figura O, las semirrectas AB y CD forman cuatro ángulos rectos, mutuamente adyacentes, \therefore podremos decir que el ángulo adyacente a un ángulo recto también será un ángulo recto.

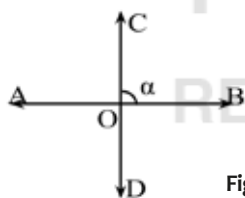


Figura O

Ángulo llano

Tal como se muestra en la figura P, un ángulo que mide exactamente 180° se llama *ángulo llano* o *ángulo plano*. Otra forma de entender a este tipo de ángulo es viéndolo como el espacio compartido entre dos semirrectas unidas por un vértice con una amplitud de 180° .

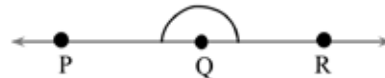


Figura P. Ángulo llano

Ángulo cóncavo o de reflejo

El *ángulo cóncavo* es un ángulo que mide más de 180° y menos de 360° . El valor del ángulo cóncavo se puede calcular conociendo la medida del ángulo convexo. Este último se define como aquel ángulo que mide más de 0° pero menos de 180° .

$$\therefore \text{Ángulo cóncavo} = 360^\circ - \text{Ángulo convexo}$$



Figura Q. Ángulo cóncavo y ángulo convexo

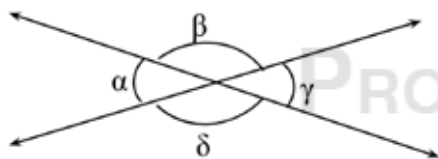




Principio de la Nueva Escuela Mexicana

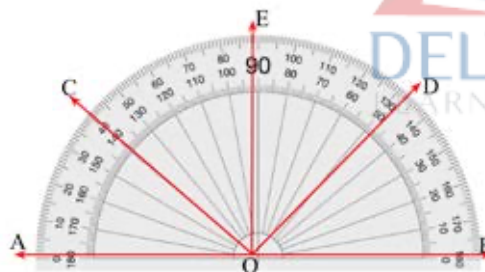


Ejercicio 1. Observa la siguiente figura y responde las siguientes preguntas.



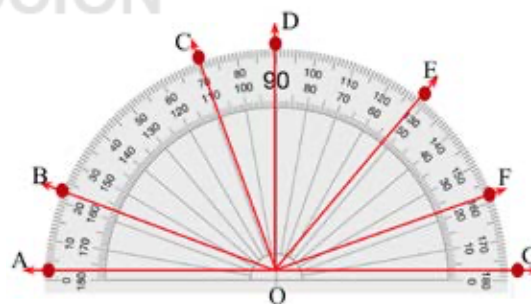
- Si $m\angle\alpha = 20$, ¿cuál es la medida del ángulo γ ?
- Si $m\angle\alpha = 20$, ¿cuál es la medida del ángulo β ?
- Si $m\angle\alpha = 20$, ¿cuál es $m\angle\delta$?
- ¿Cuál es la suma de $m\angle\beta$ y $m\angle\gamma$?
- ¿Cuál es la suma de $m\angle\gamma$ y $m\angle\delta$?
- ¿Cuál es la suma de $m\angle\delta$ y $m\angle\alpha$?
- ¿Cuál es la suma de $m\angle\alpha$ y $m\angle\beta$?

Ejercicio 2. Clasifica los siguientes ángulos con base en su medida en agudos, rectos, obtusos y llanos.



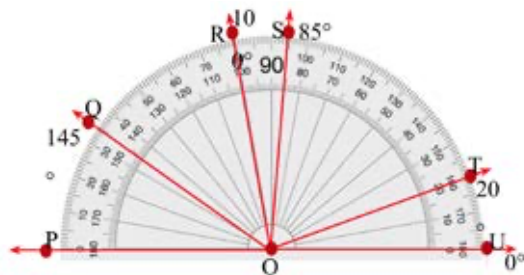
- $\angle AOC$ _____
- $\angle AOE$ _____
- $\angle AOB$ _____
- $\angle EOD$ _____
- $\angle COD$ _____
- $\angle AOD$ _____
- $\angle EOB$ _____

Ejercicio 3. Usa la figura para responder las preguntas. Clasifica el ángulo como agudo, obtuso, llano o recto. Luego di cuántos grados mide el ángulo.



- $\angle GOF$ _____
- $\angle AOE$ _____
- $\angle GOC$ _____
- $\angle EOG$ _____
- $\angle DOG$ _____
- $\angle AOG$ _____
- $\angle BOG$ _____
- $\angle AOF$ _____
- $\angle COA$ _____

Ejercicio 4. Usa la figura para encontrar la medida de cada ángulo. Posteriormente clasifica cada ángulo conforme el valor de su medida.



- a) $\angle QOR$ _____
- g) $\angle UOP$ _____
- b) $\angle TOS$ _____
- h) $\angle ROT$ _____
- c) $\angle UOR$ _____
- i) $\angle SOQ$ _____
- d) $\angle UOQ$ _____
- j) $\angle TOP$ _____
- e) $\angle UOT$ _____
- k) $\angle SOP$ _____
- f) $\angle QOP$ _____
- l) $\angle TOQ$ _____



Triángulos

Dentro del ámbito de las matemáticas, distinguimos al triángulo con el símbolo Δ seguido de tres letras mayúsculas, en donde cada una de estas es correspondiente a un vértice del triángulo. Podemos otorgar las letras en cualquier orden, pero es recomendable que estas sigan el orden preestablecido por el alfabeto.

Por ejemplo, podemos referirnos al triángulo que se muestra a continuación (ver figura B) como el ΔABC , pero también podemos llamarlo ΔBCA , ΔCAB , ΔACB , etc. Los vértices del ΔABC son conocidos como los puntos A, B y C, mientras que los lados de ΔABC serán conocidos como los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{CA} .

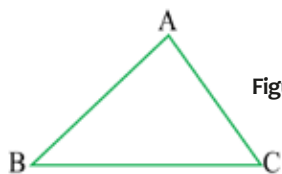


Figura B. Triángulo ABC

Otra forma de nombrar a los lados de un triángulo ABC es usando la letra minúscula del vértice opuesto a cada lado, por ejemplo, para el ΔABC emplearemos a, b y c para nombrar a los lados del triángulo (ver figura C).

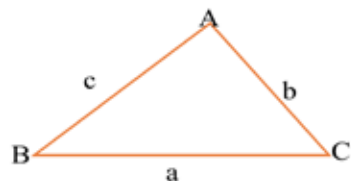


Figura C. Lados del triángulo ABC

De esta forma el lado a será opuesto al vértice A, el lado b será opuesto al vértice B, y c es el lado opuesto al vértice C.

Para simbolizar a los ángulos dentro y fuera de un triángulo, emplearemos el símbolo \angle seguido de tres letras mayúsculas que nos indiquen entre qué puntos se encuentra un ángulo, cuidando que el vértice se encuentre a la mitad señalizando que este es el punto de origen. Por ejemplo, para nombrar a los ángulos interiores de un triángulo ABC los representaremos como $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$.

Una forma más sencilla que podemos emplear para indicar un ángulo es únicamente empleando el vértice de origen que se encuentra entre los rayos o semirrectas que conforman el ángulo. Por ejemplo, podremos escribir los ángulos del triángulo como $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, respectivamente.

Siguiendo el mismo criterio para representar a los ángulos de un ΔABC , podremos representar a los ángulos exteriores como $\angle A'$, $\angle B'$ y $\angle C'$ (ver figura D).

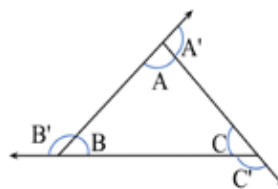


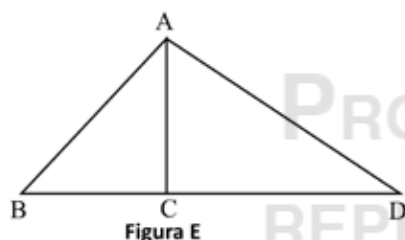
Figura D. Ángulos exteriores del triángulo ABC



Principio de la Nueva Escuela Mexicana



Observa el siguiente triángulo y responde los siguientes incisos.



1. Nombra todos los triángulos de la figura E.
2. Nombra todos los vértices de $\triangle ACD$.
3. Empleando las letras de los vértices del $\triangle ABC$ nombra todos sus ángulos interiores.
4. Nombra todos los lados del $\triangle BAD$.
5. Nombra todos los ángulos exteriores de $\triangle ABC$.



Clasificación

Así como clasificamos a los objetos por sus particularidades, los triángulos tienen dos clasificaciones relacionadas con sus lados y sus ángulos.

De acuerdo a la medida de sus lados, los triángulos pueden clasificarse en triángulos *equiláteros*, *isósceles* o *escaleno*.



Figura (a). Triángulo equilátero. Posee 3 lados iguales, 3 ángulos iguales con una medida igual a 60°



Figura (b). Triángulo isósceles. Posee 2 lados iguales, 2 ángulos iguales.



Figura (c). Triángulo escaleno. Sin lados iguales, sin ángulos iguales.

Nota: dentro de los polígonos como el triángulo, se emplean dos líneas paralelas \parallel para indicar que sus lados o ángulos son iguales.

Definición. Un triángulo equilátero tiene tres lados congruentes, un triángulo isósceles tiene dos lados congruentes y un triángulo escaleno no tiene lados congruentes. La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180° .