SERIE TLALMANALLI

DGB

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS II

David Gómez Navas

NUEVA
ESCUELA
MEXICANA

DELTA® LEARNING

Temas Selectos de Matemáticas II

Primera edición 2026
ISBN:

José Ma. Morelos No.18, Col. Pilares, C.P. 52179, Metepec, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro número: 4041
Contacto: 800 450 7676
Correo: contacto@deltalearning.com.mx

deltalearning.com.mx

Dirección editorial: Delta Learning®
Editor en jefe: Zito Octavio Alejandre Rosas
Autor: David Gómez Navas Lozano
Correctora: Karla Alejandra Garduño Juárez
Diseño: Gabriel de la Rosa y el equipo de Argonauta Comunicación
Portada: Elio Teutli Cortés
Imágenes: Freepik y Adobe Stock
Producción: Lizbeth López Reyes

Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces provistos en este libro no pertenecen a Delta Learning®. Por tanto, no tenemos ningún control sobre la información que los sitios web están dando en un momento determinado y por consiguiente no garantizamos la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque esta información se compila con gran cuidado y se actualiza continuamente, no asumimos ninguna responsabilidad de que sea correcta, completa o actualizada.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan las opiniones de los mismos y, a menos que se indique específicamente, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material en cualquiera de los sitios incluidos en este libro no está autorizada, ya que el material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos están reservados a sus respectivos propietarios y Delta Learning® no se responsabiliza por nada de lo que se muestra en los enlaces provistos.

Impreso en México

Presentación

El presente libro, ***Temas Selectos de Matemáticas II***, forma parte del nuevo Plan de Estudios para la Educación Media Superior establecido por la Secretaría de Educación Pública y la Dirección General de Bachillerato (DGB) cuyo objetivo es dar continuidad al desarrollo formativo de los estudiantes comenzando en Temas Selectos de Matemáticas I. En concordancia con el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) de la Nueva Escuela Mexicana (NEM) esta asignatura profundiza en conceptos matemáticos avanzados que permiten al estudiantado fortalecer su capacidad de análisis, razonamiento lógico y modelación de fenómenos reales. Desde este enfoque, las matemáticas se conciben como un recurso sociocognitivo que posibilita comprender, representar y predecir comportamientos de sistemas complejos presentes en la vida cotidiana.

El primer bloque formativo aborda los sistemas dinámicos discretos, las series y las sucesiones, así como el cálculo del área bajo la curva, conocimiento indispensable para acercarse al cálculo integral de funciones. Estos temas permiten al estudiantado reconocer patrones, estudiar procesos que evolucionan en el tiempo y comprender cómo la acumulación de cantidades puede representarse gráficamente. Al analizar sucesiones y series se fomenta la capacidad de identificar comportamientos recurrentes y modelar situaciones reales que dependen de iteraciones sucesivas. La introducción al área bajo la curva establece las bases intuitivas del cálculo integral, al relacionar la suma de aproximaciones con la medición de magnitudes continuas.

El segundo bloque formativo se centra en las integrales indefinidas y definidas, así como en la relación entre derivada e integral como procesos inversos. Aquí se consolida la comprensión del cálculo integral desde una perspectiva analítica y geométrica, destacando la importancia de las antiderivadas, la interpretación del área como acumulación y la conexión fundamental entre los cambios instantáneos y la acumulación de variaciones. Este bloque fortalece la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo y su relevancia para resolver problemas de movimiento, crecimiento, optimización y cuantificación precisa de magnitudes.

El tercer bloque formativo introduce al estudiantado al estudio de ecuaciones diferenciales y métodos numéricos. Estos temas representan un puente hacia aplicaciones más avanzadas de las matemáticas en las ciencias, la ingeniería, la economía y la tecnología. Las ecuaciones diferenciales permiten modelar fenómenos dinámicos como el crecimiento poblacional, el movimiento, la difusión o el decaimiento de sustancias. Por su parte, los métodos numéricos brindan herramientas para aproximar soluciones cuando los métodos analíticos resultan insuficientes, favoreciendo el uso de algoritmos, estimaciones sucesivas y técnicas de cálculo asistido.

El propósito final de este libro es contribuir a la formación integral de las y los estudiantes, ampliar su comprensión del mundo a través de herramientas matemáticas avanzadas y prepararlos para su inserción futura en estudios superiores y ámbitos productivos donde el pensamiento lógico, la modelación y la resolución de problemas sean esenciales.

La Nueva Escuela Mexicana

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) tiene como principio fundamental que la educación sea entendida para toda la vida bajo el concepto de aprender a aprender, con actualización continua, adaptación a los cambios y aprendizaje permanente con el compromiso de brindar calidad en la enseñanza.

En la Editorial Delta Learning tenemos como misión crear materiales educativos de calidad, que cumplan los fundamentos del modelo educativo vigente de la Educación Media Superior, adoptando a la NEM como un eje rector en el diseño de nuestros libros, con el objetivo de promover aprendizajes de excelencia, inclusivos, pluriculturales, colaborativos y equitativos durante la formación de los bachilleres.

Haciendo suyo el reto, la Editorial Delta Learning desarrolla los contenidos de cada uno de sus ejemplares con los siguientes Principios que fundamentan la NEM:

Fomento de la identidad con México. El amor a la Patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso con los valores plasmados en la Constitución Política.

Responsabilidad ciudadana. El aceptar los derechos y deberes personales y comunes, respetar los valores cívicos como la honestidad, el respeto, la justicia, la solidaridad, la reciprocidad, la lealtad, la libertad, la equidad y la gratitud.

Honestidad. Es un compromiso fundamental para cumplir con la responsabilidad social, lo que permite que la sociedad se desarrolle con base en la confianza y en el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.

Participación en la transformación de la sociedad. El sentido social de la educación implica construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superen la indiferencia y la apatía para lograr la transformación de la sociedad en conjunto.

Respeto de la dignidad humana. El desarrollo integral del individuo promueve el ejercicio pleno y responsable de sus capacidades, el respeto a la dignidad y derechos humanos de las personas es una manera de demostrarlo.

Promoción de la interculturalidad. La comprensión y el aprecio por la diversidad cultural y lingüística, por el diálogo e intercambio intercultural sobre una base de equidad y respeto mutuo.

Promoción de la cultura de paz. La construcción de un diálogo constructivo, solidario y en búsqueda de acuerdos, permiten una solución no violenta a los conflictos y la convivencia en un marco de respeto a las diferencias.

Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente. El desarrollo de una conciencia ambiental sólida que favorezca la protección y conservación del medio ambiente, propiciando el desarrollo sostenible y reduciendo los efectos del cambio climático.

Estructura del libro

El presente libro se encuentra estructurado en 3 parciales en los cuales encontrarás desarrolladas las progresiones en apertura, desarrollo y cierre, asimismo cuenta con las siguientes secciones:

Evaluación diagnóstica: Esta se realiza al inicio del libro y tiene la finalidad de recuperar los conocimientos y habilidades necesarias para abordar los contenidos específicos de cada una de las progresiones de aprendizaje.

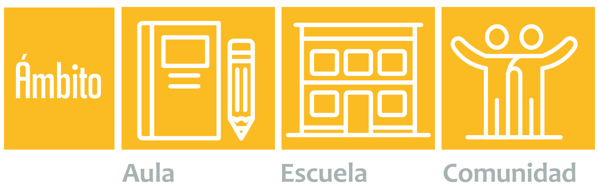
Actividades de aprendizaje: En las cuales pondrás a prueba los conocimientos y habilidades desarrollados en cada uno de los temas. Las actividades estarán vinculadas a los **ámbitos** del **Nuevo Modelo Educativo (NME)** de la **Escuela Media Superior (EMS)**, **aula – escuela – comunidad,** así como a alguno de los principios de la **Nueva Escuela Mexicana (NEM)** por ser este un programa de estudios orientado a recuperar el sentido de pertenencia a los valores que te identifican con nuestro país.

En cada actividad de aprendizaje encontrarás un tablero como el que se presenta a la derecha de este párrafo, en el cual podrás identificar a través de sus iconos específicos, tanto los **tres ámbitos del NME de la EMS**, como los **ocho principios de la NEM** a los que corresponda dicha actividad.

A continuación te mostramos las secciones de este tablero así como el significado de cada icono:

En la parte superior del tablero se encuentra una barra gris donde estará indicado el número de actividad.

A continuación verás una barra amarilla donde se indican los tres ámbitos (NME/EMS).



Por último, verás una sección de color naranja donde están indicados los principios de la NEM.

Fomento de la identidad con México

Responsabilidad ciudadana

Honestidad

Participación en la transformación de la sociedad

Respeto de la dignidad humana

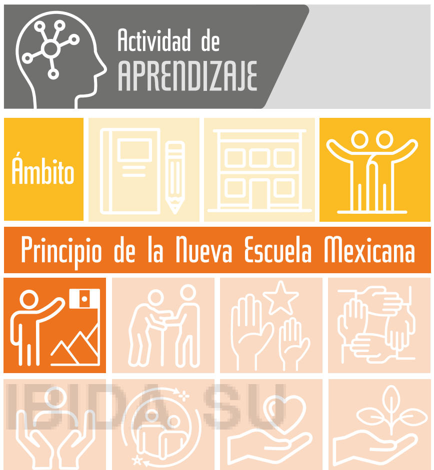
Promoción de la interculturalidad

Promoción de la cultura de paz

Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente

Para identificar el ámbito y principio correspondiente a cada actividad verás su respectivo icono en color amarillo y naranja y el resto de los iconos en un tono opaco.

En el ejemplo que ves a la derecha, el **ámbito** corresponde a la categoría **COMUNIDAD y el principio de la NEM corresponde al Fomento de la identidad con México.**



Actividades Transversales: Actividades orientadas a facilitar el proceso de vinculación de los conocimientos y habilidades de los recursos sociocognitivos con las distintas áreas de conocimiento.

Actividades QR interactivas: Actividades que asocian la tecnología con los conocimientos desarrollados en los temas, sólo se escanea el código QR y listo, se pueden reforzar los conocimientos y habilidades.

Realidad aumentada: Siempre es importante que todos los sentidos estén inmersos en el proceso de enseñanza – aprendizaje, las actividades de realidad aumentada dan una visión gráfica y vívida de los aprendizajes que se desean desarrollar en el libro.

Actividades Socioemocionales El curriculum ampliado no puede faltar dentro del contenido del texto, por ello, se incluyen actividades destinadas a desarrollar habilidades planteadas por los recursos socioemocionales del NME.

Adicionalmente podrás encontrar las siguientes secciones que te permitirán ampliar y afirmar los aprendizajes obtenidos en el curso.

Habilidad LECTORA

GLOSARIO

Evaluación DEL PARCIAL

BIBLIOGRAFÍA

Cuando visualices el siguiente ícono en alguna de las progresiones de aprendizaje, el código QR que aparezca junto a él tendrá una actividad perteneciente al Programa Aula Escuela Comunidad. Finalmente, te presentamos el ícono que señala el número de progresión al que pertence cada tema.

Proyecto Escolar Comunitario

Progresión 1

Progresiones

El libro se encuentra apegado al NME de la EMS y desarrolla cada una de las progresiones del programa de ***Temas Selectos de Matemáticas II***.

1. Examina una problemática en la que se necesite aplicar la composición de funciones de variable real, particularmente la composición de una función consigo misma, con lo cual explora la definición de sistema dinámico discreto y algunos ejemplos sencillos que remitan a la recurrencia y la autosimilitud, posteriormente observa propiedades y algunos resultados históricamente importantes que han dado solución a problemas o situaciones reales como lo son el Atractor de Lorenz o el estudio del Caos.
2. Revisa los conceptos de sucesión y serie, examinando algunos ejemplos (sucesiones aritméticas, geométricas, Fibonacci, serie aritmética y geométrica) con los cuales puede observar los conceptos de límite y convergencia e identifica estructuras que poseen patrones, comportamientos repetitivos o fractales en su entorno, apoyándose de herramientas tecnológicas disponibles.
3. Aproxima el área debajo de una curva utilizando el método de Suma de Riemann considerando una suma finita de términos. Luego emplea la idea del límite al considerar una cantidad infinita de ellos con lo cual calcula el área debajo de la curva observando cómo ello se concreta en la integral definida. Interpreta esta suma de términos como un área infinitesimal y observa su utilidad en la solución de problemas de otras Unidades de Aprendizaje Curricular, aprovechando los recursos tecnológicos disponibles.
4. Calcula integrales indefinidas de funciones polinomiales de manera analítica, en particular de funciones lineales y cuadráticas, considerando las expresiones correspondientes y observando la relación con el cálculo de área debajo de la gráfica considerando la integral definida, apoyado de recursos tecnológicos, con lo cual revisa algunas propiedades de la integral que le permitan entenderla desde una perspectiva más formal.
5. Reconoce a la derivada y la integral como procesos inversos a partir del análisis de la antiderivada lo cual le permita establecer el Teorema Fundamental del Cálculo, con ello observa la relación que existe entre la gráfica de una función, la gráfica de su derivada y la gráfica de su antiderivada, establece cómo el cambio de la pendiente en cada punto de la gráfica de la derivada refiere al cambio instantáneo de la gráfica principal y cómo este comportamiento también se da entre la gráfica de la función principal respecto a la gráfica de su antiderivada, lo anterior con la finalidad de abordar la solución de problemáticas de otras Unidades de Aprendizaje Curricular haciendo uso de recursos tecnológicos disponibles.
6. Analiza situaciones-problema provenientes de Unidades de Aprendizaje Curricular que pueden ser modelados a partir del uso de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, el crecimiento poblacional, la propagación de una enfermedad contagiosa, modelos más complejos como el modelo presa-predador o el modelo de Kuramoto, con los cuáles pueda observar cómo fenómenos o problemas reales pueden describirse y entenderse a través de expresiones matemáticas, con lo cual examina la utilidad de la derivada y la integral, usando herramientas tecnológicas para la exploración.
7. Considera los métodos numéricos como procesos matemáticos iterativos que permiten aproximar una solución con cierto margen de error, revisa algunos de los métodos más populares. como el método de bisección, el método de aproximaciones sucesivas o el método Newton-Raphson, haciéndose consciente de que la iteración numérica puede provocar resultados totalmente diferentes dependiendo del redondeo o truncamiento numérico, con lo cual da pie para explorar la definición de sistemas caóticos y sensibilidad de condiciones iniciales en sistemas.

Índice

Pág.

Evaluación DIAGNÓSTICA

Elije la opción correcta a cada una de las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la definición formal de límite en cálculo diferencial? ( )
   a) El valor al que se acerca una función cuando la variable independiente se aproxima a un cierto valor.
   b) La tasa de cambio instantáneo de una función.
   c) El valor máximo de una función en un intervalo dado.
   d) La suma de infinitos términos de una serie.

2. ¿Cuál es la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita? ( )
   a) $S = a/(1 - r)$
   b) $S = a/(1 + r)$
   c) $S = a \cdot (1 - r)$
   d) $S = a \cdot (1 + r)$

3. ¿Qué método se utiliza para aproximar el área bajo una curva? ( )
   a) Método de Oresme.
   b) Método de Euler.
   c) Método de Riemann.
   d) Método de Lagrange.

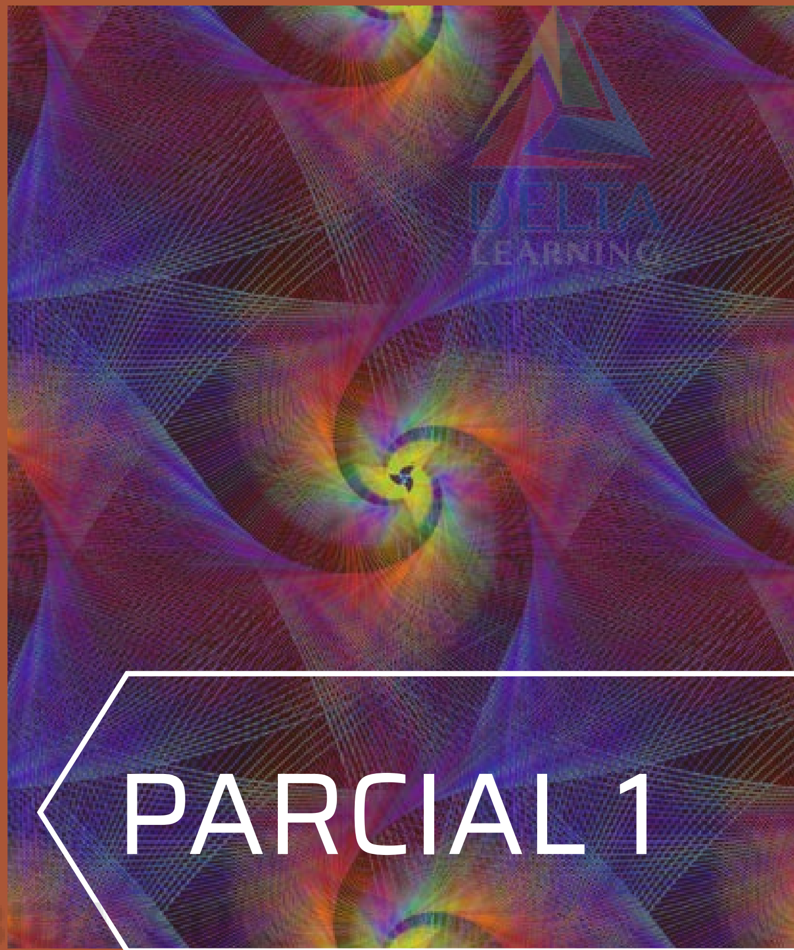
4. ¿Qué representa la integral definida de una función? ( )
   a) El área bajo la curva de la función.
   b) La derivada de la función.
   c) La función original.
   d) La suma de los volúmenes de la función.

5. ¿Cuál es la fórmula para la integral definida de una función f(x) de “a” hasta “b”? ( )
   a) $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$
   b) $\int_a^b f(x)\, dx = F(a) - F(b)$
   c) $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) + F(a)$
   d) $\int_a^b f(x)\, dx = F(a) + F(b)$

6. ¿Qué establece el Teorema Fundamental del Cálculo? ( )
   a) Que la derivada y la integral son procesos independientes.
   b) Que la derivada y la integral son procesos inversos.
   c) Que la derivada es la inversa de la integral.
   d) Que la integral es la inversa de la derivada.

7. Describe el proceso de encontrar la ecuación de la tangente a una curva en un punto dado. ( )
   a) Se calcula la integral de la función en el punto dado.
   b) Se calcula la derivada de la función y se evalúa en el punto dado para obtener la pendiente de la tangente.
   c) Se calcula la segunda derivada de la función y se evalúa en el punto dado para obtener la pendiente de la tangente.
   d) Se calcula el área bajo la curva en el punto dado.

8. ¿Qué es la integral indefinida de una función f(x)? ( )
   a) La función original f(x).
   b) La derivada de la función f(x).
   c) Una función F(x) tal que F'(x) = f(x).
   d) El área bajo la curva de la función f(x).



PARCIAL 1

Categoría de aprendizaje:

- C1. Procedural.

Subcategorías:

- S1. Elementos aritmético – algebraicos.
- S2. Elementos geométricos.

Meta de aprendizaje:

- C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos de las ciencias y de su entorno.
- C1M2. Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.
- C1M3. Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.

Categoría de aprendizaje:

- C2. Procesos de intuición y razonamiento.

Subcategorías:

- S1. Capacidad para observar y conjeturar.
- S2. Pensamiento intuitivo.
- S3. Pensamiento formal.

Meta de aprendizaje:

- C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- C2M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.
- C2M3. Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.
- C2M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.

Categoría de aprendizaje:

- C3. Solución de problemas y modelación.

Subcategorías:

- S1. Uso de modelos.
- S3. Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

Metas de aprendizaje:

- C3M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
- C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas.

Categoría de aprendizaje:

- C4. Interacción y lenguaje matemático.

Subcategorías:

- S1. Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico.
- S2. Negociación de significados.
- S3. Ambiente matemático de comunicación.

Metas de aprendizaje:

- C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

Aprendizajes de trayectoria:

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como obser-

var, intuir, conjeturar y argumentar para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).

- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

Progresiones:

1. Examina una problemática en la que se necesite aplicar la composición de funciones de variable real, particularmente la composición de una función consigo misma, con lo cual explora la definición de sistema dinámico discreto y algunos ejemplos sencillos que remitan a la recurrencia y la autosimilitud, posteriormente observa propiedades y algunos resultados históricamente importantes que han dado solución a problemas o situaciones reales como lo son el Atractor de Lorenz o el estudio del Caos.
2. Revisa los conceptos de sucesión y serie, examina algunos ejemplos (sucesiones aritméticas, geométricas, Fibonacci, serie aritmética y geométrica) con los cuales puede observar los conceptos de límite y convergencia e identifica estructuras de su entorno que poseen patrones, comportamientos repetitivos o fractales, apoyándose de herramientas tecnológicas disponibles.
3. Aproxima el área debajo de una curva utilizando el método de Suma de Riemann considerando una suma finita de términos. Luego emplea la idea del límite al considerar una cantidad infinita de ellos con lo cual calcula el área debajo de la curva observando cómo ello se concreta en la integral definida. Interpreta esta suma de términos como un área infinitesimal y observa su utilidad en la solución de problemas de otras Unidades de Aprendizaje Curricular, aprovechando los recursos tecnológicos disponibles.

PRESENTACIÓN DEL PRIMER PARCIAL

En este parcial analizaremos tres ejes fundamentales del pensamiento matemático moderno, cuyos conceptos permiten comprender el comportamiento de diversos fenómenos reales y apoyar la construcción de modelos útiles en múltiples áreas del conocimiento.

Comenzaremos analizando los sistemas dinámicos discretos, estos son una herramienta poderosa para estudiar procesos que evolucionan momento a momento en el paso del tiempo. Estos sistemas aparecen en contextos tan variados como el crecimiento de poblaciones, la economía, las ciencias computacionales y la física. A través de ellos, veremos cómo una regla aparentemente simple puede generar comportamientos sorprendentes, patrones repetitivos o incluso dinámicas impredecibles. Comprenderemos cómo se construyen, cómo se interpretan sus iteraciones y qué nos revelan sobre la evolución de distintos fenómenos.

El segundo gran tema será el estudio de series y sucesiones, los cuales son necesarios para encontrar y describir patrones numéricos, así como para estudiar la convergencia, el crecimiento y la estabilidad de procesos matemáticos. Entre los diversos tipos de sucesiones que exploraremos están las aritméticas y las geométricas, con respecto de cada una estudiaremos su definición, comportamiento y sus aplicaciones; además, profundizaremos en el conocimiento de las series como sumas ordenadas que permiten aproximar valores, modelar situaciones y fundamentar ideas más avanzadas en el análisis matemático. A partir de ejemplos prácticos, veremos cómo estas herramientas permiten entender desde patrones simples hasta fenómenos complejos.

Finalmente, abordaremos el tema del área bajo la curva, un concepto clave en matemáticas que conecta al algebra y a la geometría con las bases del cálculo integral. Estudiaremos cómo aproximar áreas mediante particiones del intervalo y sumas de rectángulos, y cómo este proceso nos acerca a la noción de límite.

Progresión 1

Sistemas dinámicos discretos

APERTURA

¿Te has preguntado qué es un sistema y qué tipos de sistemas existen? Un sistema es un conjunto de partes que trabajan juntas para cumplir una función o propósito común. Por ejemplo:

a) En un hospital, los doctores, enfermeras, camilleros, radiólogos, secretarias, recepcionistas son componentes de una organización cuya meta es atender a los enfermos para que se curen.
b) En un automóvil, el motor, los frenos, las llantas y el sistema eléctrico son componentes que trabajan juntos para lograr que el auto se mueva.
c) En una empresa, los distintos departamentos (ventas, finanzas, producción, recursos humanos) funcionan como partes de un sistema económico y organizativo.

No solo existen sistemas físicos como máquinas u organismos, sino también sistemas abstractos o conceptuales, como los que encontramos en:

a) **Economía.** Como en el caso de los precios y sus cambios según la oferta y la demanda.
b) **Crecimiento de la población.** Cómo aumenta o disminuye la población a lo largo de un periodo.
c) **Biología.** Cómo evoluciona una especie o cómo crecen las células.

En síntesis, un sistema puede ser cualquier conjunto de elementos interrelacionados, reales o abstractos, que buscan un objetivo común, ya sea hacer algo o evitar que algo pase.

¿Qué es un sistema estático y dinámico?

Tenemos dos tipos de sistemas: "estáticos" y "dinámicos" veamos sus características:

a) **Sistema estático:** la respuesta de salida o resultado del sistema depende solo del valor actual de la entrada, y no de lo que pasó antes. Por ejemplo, una calculadora es un sistema estático, ya que si introduces valores de entrada como 3+5, su valor de salida es 8, resultado que depende de los valores de entrada.

b) **Sistema dinámico:** la respuesta de salida actual o resultado no solo depende de los valores que entran ahora, sino también de los que entraron antes, es decir, de una o varias entradas en el pasado. Esto significa que el sistema tiene memoria y evolución en el tiempo, por ejemplo, los siguientes casos de estudio:

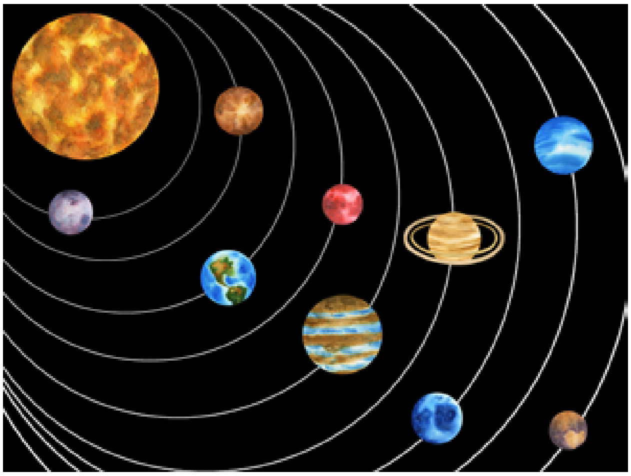
I) Una cuenta bancaria con interés compuesto es un sistema dinámico: se puede analizar la evolución del dinero que tienes en una inversión con interés compuesto. Por ejemplo, si lo dejas crecer y si cada día, el saldo del banco crece un 0.5%. Esa regla permite calcular el saldo de mañana a partir del de hoy.

II) El movimiento de un péndulo depende de la velocidad y posición previa, en donde a mayor velocidad aumenta la energía cinética y la amplitud de la oscilación. Si la posición inicial (ángulo de desplazamiento) desde la cual se inicia el movimiento del péndulo es muy grande se afecta su movimiento, si se modifica ligeramente el período de oscilación el movimiento se vuelve menos uniforme.

Sistemas dinámicos

En general un sistema dinámico es cualquier modelo matemático que describe cómo algo cambia a lo largo del tiempo según ciertas reglas. Si se deja actuar sin un control, puede tender a estabilizarse al encontrar un equilibrio, pero también puede volverse inestable, creando caos y destrucción. Se refiere a cualquier cosa que evolucione o se transforme poco a poco, por ejemplo:

a) El crecimiento de una planta. Se puede observar cómo crece desde que es un brote hasta que da flores o frutos.
b) El movimiento de un planeta. Se puede observar el desplazamiento alrededor de su órbita.
c) La temperatura de un cuerpo. Analizando el incremento o descenso de calor a lo largo del día.



A través de una regla, un sistema dinámico describe cómo cambian con el tiempo las variables que representan las características de un fenómeno. Estas variables pueden pertenecer a distintos tipos de sistemas, como físicos, biológicos o sociales (por ejemplo, posición, temperatura, población), y su evolución permite entender y predecir el comportamiento del fenómeno en diferentes momentos.

Tipos de sistemas dinámicos

Existen dos grandes tipos de sistemas dinámicos, según la forma en que el tiempo avanza:

a) Sistemas dinámicos continuos

En estos sistemas, el tiempo avanza de manera continua y sin pausas, por lo que el estado del sistema puede variar en cualquier momento. Dicho de otra forma, la evolución ocurre de forma continua, no en saltos ni etapas separadas.

El comportamiento de los sistemas dinámicos continuos se describe mediante derivadas y ecuaciones diferenciales, las cuales, sirven para modelar cómo cambian las variables de estado con respecto al tiempo.

Ejemplo: durante el movimiento de un automóvil, su velocidad y posición cambian a cada segundo. Para mostrar cómo algo cambia de posición en cada momento, matemáticamente, se representa el movimiento con la derivada:

$\frac{dx}{dt} = f(x)$, que se lee como "el cambio instantáneo de (x) con respecto al tiempo depende de (x)".

En palabras simples el sistema dinámico continuo "fluye" como el agua de un río, sin saltos.

b) Sistemas dinámicos discretos

En los sistemas dinámicos discretos los cambios se estudian por intervalos definidos (por ejemplo, cada año, cada día o cada generación). En este enfoque, el tiempo avanza en pasos separados (n=0,1,2,3,…) por lo que el tiempo se calcula de un paso al siguiente usando una recurrencia o función iterada, como si observáramos los fotogramas de una película o los días marcados en un calendario.

De esta manera, lo único que nos interesa en este tipo de sistemas es conocer cómo cambia el estado de un instante al siguiente. No analizamos lo que ocurre dentro del intervalo entre un paso y el que sigue; es decir, no estudiamos el proceso detallado entre un momento y otro, sino únicamente el resultado final de cada transición.

Definición. El "estado de un sistema" se refiere a la condición concreta en la que se encuentra ese sistema en un momento determinado. Es el conjunto de valores o características que permiten describirlo por completo en ese instante. Por ejemplo, piensa en un videojuego cuando guardas tu progreso: el estado del juego incluye cuántas vidas o puntos tienes, tu ubicación exacta en el mapa y cualquier otro dato necesario para continuar después desde ese mismo punto.

Una forma sencilla en la que podemos visualizar la diferencia en cómo se comporta o evoluciona un sistema dinámico continuo vs un sistema dinámico discreto es observando el siguiente gráfico:

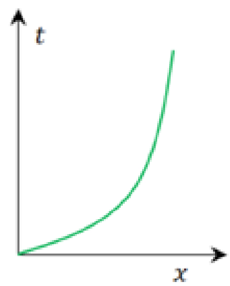


Figura. Sistema dinámico continuo

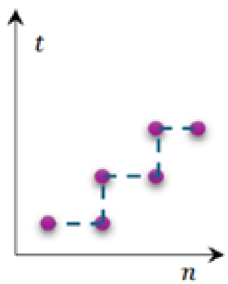


Figura. Sistema dinámico discreto

Figuras. En el gráfico, el sistema dinámico continuo se representa mediante una curva suave y continua, ya que estos evolucionan de esta manera en el tiempo. Mientras que el sistema dinámico discreto se representa mediante una serie de puntos separados, reflejando su evolución en pasos discretos y aislados.

Modelos matemáticos

Para comprender o diseñar un sistema es necesario anticipar su comportamiento. La herramienta más precisa para lograrlo es el modelo matemático, una representación basada en ecuaciones que describe las relaciones entre las variables que gobiernan dicho sistema. Estos modelos permiten simular escenarios dinámicos y analizar cómo evoluciona el sistema sin necesidad de experimentarlo directamente. Como ejemplos tenemos a los modelos de sistemas dinámicos, en los que el estado del sistema en un instante "n" puede representarse mediante una regla de recurrencia o función iterada, que describe cómo un valor pasado (x_n) se transforma en el siguiente valor (x_{n+1}):

Por ejemplo, imagina un modelo simple de crecimiento de población, en donde x_n es la población actual y x_{n+1} es la población en el próximo período. Si pensamos en concreto en una población que por cada período crece un 20%, la función (f) podría modificarse y expresarse como: $x_{n+1} = 1.2\, x_n$. En este caso, el estado es la población, y la ecuación describe cómo cambia ese estado de un período al siguiente.

Aquí la población se actualiza una vez por generación, por lo que el modelo de crecimiento poblacional lo podríamos clasificar como discreto.

En otro ejemplo, ahora con respecto a un modelo dinámico de crecimiento discreto, si tienes tu cuenta de ahorros y el banco te paga 0.05 o 5% de crecimiento continuo en intereses cada mes, tu dinero crece de manera mensual, esto lo expresamos como: $M_{n+1} = 1.05\, M_n$, en donde (M) es tu dinero, y 0.05 representa un 5% de crecimiento, por lo que cada mes tienes el 105% del mes anterior.

DESARROLLO

Composición de funciones

Para estudiar un sistema dinámico discreto lo que hacemos es aplicar la misma función o regla una y otra vez, viendo cómo cambia el estado del sistema paso a paso con el tiempo. Para analizar cómo evoluciona, usamos herramientas que nos permiten repetir esa regla muchas veces, como la composición de funciones o el mapa logístico, que nos ayudan a entender y predecir qué va ocurriendo en cada paso.

Los mapas logísticos son un tipo particular de ecuación que permite analizar fenómenos con un comportamiento caótico. Se basan en la repetición de funciones, sobre todo aquellas que representan el crecimiento de una población u otras dinámicas donde pequeños cambios pueden producir comportamientos muy distintos.

Por otro lado, la composición de funciones es una herramienta más general que permite encadenar procesos, en donde una función se convierte en la entrada de la siguiente. Esto nos permite generar distintos escenarios el primero es engendrar una función $g(x)$ dentro de otra $f(x)$ y en un segundo caso eficaz para los sistemas dinámicos discretos podremos iterar una función sobre sí misma, lo que se denota como $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, etc. Esto permite analizar el comportamiento del sistema a largo plazo y entender cómo evoluciona su estado con el tiempo. La ventaja de la composición de funciones sobre los mapas logísticos es que es una herramienta poderosa que puede ser empleada para la iteración de todo tipo de funciones.

Nota: la función logística es comúnmente empleada dentro de un sinfín de ejemplos clásicos del comportamiento de un sistema dinámico discreto que exhibe recurrencia y autosimilitud. La función se expresa en su forma más común, como $f(x) = rx\,(1-x/K)$, donde K es la capacidad de carga. En muchos ejemplos, K está normalizada a 1, lo que simplifica la función a la forma $f(x) = rx\,(1-x)$, donde r es un parámetro. Dependiendo del valor de r, la función puede exhibir comportamientos recurrentes y autosimilares.

Iterar
Repetir un proceso o una función una y otra vez, donde el resultado de cada paso se utiliza como entrada para el siguiente.

Para comprender el primero de los escenarios sobre cómo funciona la composición de funciones imagina que tienes dos máquinas que transforman números:

a) La primera llamada $g(x)$ hace algo con el número que se introduce, por ejemplo, lo eleva al cuadrado.
b) La segunda llamada $f(x)$ toma el resultado de la primera y le aplica otra operación (por ejemplo, lo multiplica por 2 y le suma 3).

Si primero usas la función $g(x)$ y luego $f(x)$, estás componiendo funciones. Esto se escribe así: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y se lee "g seguida de f".

Básicamente, es como una cadena de procesos, primero tomas un valor y lo metes en la función $g(x)$, eso te da un resultado. Luego, ese resultado lo metes en la función $f(x)$ y te da otro resultado final. A eso se le llama composición de funciones y se escribe como $f(g(x))$ o $(f \circ g)(x)$. Por ejemplo:

a) Si $g(x) = x^2$ y f(x)=2x+3, entonces $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2(x^2) + 3 = 2x^2 + 3$.

b) Si $f(x) = 3x$ y $g(x) = 2x + 1$, entonces $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(3x) + 1 = 6x + 1$.

c) Si $g(x) = 5x - 2$ y $f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$ entonces $f(g(x)) = \frac{2(5x-2)+1}{3(5x-2)-2} = \frac{10x-4+1}{15x-6-2} = \frac{10x-3}{15x-8}$.

Actividad de APRENDIZAJE 1

Principio de la Nueva Escuela Mexicana

Ámbito

I. Sean las siguientes funciones, realiza la composición de funciones en cada caso propuesto:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 40x - 84;$

$g(x) = x^2 - 4x - 12;$

$h(x) = x + 2;$

$j(x) = x - 6$

a) $f(h(x)) =$

b) $g(j(x)) =$

c) f(j(x))

d) h(g(x))

e) j(f(x))

f) g(h(x))

Ahora analicemos el caso en donde una función se aplica repetidamente sobre su propio resultado, esto es lo que se conoce como una iteración sobre sí misma, $f(f(x)), f(f(f(x)))$ tantas veces como se desee conocer el valor de un sistema directamente sobre un intervalo. Esto es fundamental para estudiar sistemas dinámicos discretos, es decir, procesos que cambian en pasos separados (día a día, año con año, generación tras generación). En estos sistemas, el estado siguiente depende directamente del estado anterior.

Matemáticamente, la iteración se expresa como: $x_{n+1} = f(x)$, lo que significa que el nuevo valor se obtiene aplicando la función al valor previo. Pensemos en el valor resultante para la función después de aplicar la iteración en dos ocasiones: $x_{n+2} = f(f(x)) = (f \circ f)(x)$

Ahora, así se ve después de tres pasos:
$x_{n+3} = f(f(f(x))) = f^3(x)$

Esto se conoce como composición de funciones, pero puedes pensarlo como subir una escalera, cada vez que aplicas la función subes un escalón más, si las aplicas cuatro veces subes cuatro escalones.

Este proceso es útil para modelar fenómenos que evolucionan paso a paso y donde cada etapa depende de la anterior, como el crecimiento de poblaciones, procesos biológicos o cambios físicos. Por ejemplo, si una población de una especie marina crece siguiendo la regla o mapa logístico $f(x) = r \cdot x\,(1 - x)$, donde x es la proporción de la población, (estando al 70% de su capacidad, o bien 0.7) y r es una constante que representa la tasa de crecimiento, entonces para saber su estado después de tres generaciones, basta con aplicar la función tres veces:

$$x_{n+3} = f(f(f(x_n))) = f^3(xn)$$

Ejemplo. Pensemos en el crecimiento de una cepa de levaduras, en donde cada día la población de bacterias crece un 8%, la función sería $f(x) = 1.08x$. Si empiezas con 1000 individuos, después de 3 días aplicas la función tres veces:

$$x_{n+3} = f^3(1000) = 1.08^3 \times 1000$$

Ejercicio resuelto. En cada revisión técnica, los ingenieros especializados en instrumentación miden los centímetros cuadrados de oxidación en una placa metálica, la cual sigue un crecimiento conforme la regla $f(x) = r \cdot x \cdot (1 - x)$. Si quieres saber cuantos centímetros de óxido habrá dentro de tres revisiones, simplemente aplicas la función tres veces: $x_{n+3} = f(f(f(x_n))) = f^3(x_n)$.

Solución. Se tiene que la tasa de crecimiento es r=2.5 y el área de la placa que está oxidada crece a un 20% de la capacidad, es decir, $x_0 = 0.20$, con estos datos podremos encontrar $x_3 = f^3(x_0)$.

Primera revisión técnica:
$[x_1 = f(x_0) = 2.5 \cdot 0.20 \cdot (1 - 0.20)]$.
Calculamos: $(1 - 0.20 = 0.80)$. Luego $(0.20 \cdot 0.80 = 0.16)$.
Finalmente $(2.5 \cdot 0.16 = 0.40)$.
$\Rightarrow (x_1 = 0.40)$.

Segunda revisión técnica:
$(x_2 = f(x_1) = 2.5 \cdot 0.40 \cdot (1 - 0.40))$.
Calculamos: $(1 - 0.40 = 0.60)$. Después $(0.40 \cdot 0.60 = 0.24)$.
Finalmente $(2.5 \cdot 0.24 = 0.60)$.
$\Rightarrow (x_2 = 0.60)$.

Tercera revisión técnica:
$(x_3 = f(x_2) = 2.5 \cdot 0.60 \cdot (1 - 0.60))$.
Calculamos: $(1 - 0.60 = 0.40)$ Luego $(0.60 \cdot 0.40 = 0.24)$.
En último lugar $(2.5 \cdot 0.24 = 0.60)$.
$\Rightarrow (x_3 = 0.60)$.

Resultado:
$(x_0 = 0.20 \Rightarrow x_1 = 0.40 \Rightarrow x_2 = 0.60 \Rightarrow x_3 = 0.60)$.
Con estos parámetros podremos decir que la oxidación en la tercera revisión cubre el 60% del área de la placa metálica.

Ejercicio resuelto. Un médico dermatólogo observó que en un paciente la recuperación de una herida en la piel se reduce según la regla $f(x) = 0.7x$. Esto quiere decir que cada día queda solo el 70% de la herida del día anterior.

Si se desea saber qué tanto de la herida aún queda después de 6 días lo expresaremos como: $x_{n+6} = f^6(x_n)$

En este ejercicio estudiamos un caso en donde el cuerpo se recupera poco a poco todos los días, lo cual podremos medir con la ayuda de la iteración para calcular este proceso dinámico.

Regla: $f(x) = 0.7x$ (cada día queda 70% de lo que había). En un inicio tenemos un 100% de la herida, por lo tanto: $x_0 = 1.00$. Queremos saber $(x_6 = f^6(x_0))$ (tras 6 días).

Día 1: $x_1 = 0.7 \cdot 1.00 = 0.70$ en porcentaje → 70%.
Día 2: $x_2 = 0.7 \cdot 0.70 = 0.49$ en porcentaje → 49%.
Día 3: $x_3 = 0.7 \cdot 0.49 = 0.343$ en porcentaje → 34.3%.
Día 4: $x_4 = 0.7 \cdot 0.343 = 0.2401$ en porcentaje → 24.01%.
Día 5: $x_5 = 0.7 \cdot 0.2401 = 0.16807$ en porcentaje → 16.807%.
Día 6: $x_6 = 0.7 \cdot 0.16807 = 0.117649$ en porcentaje → 11.7649%.

Resultado: la herida se reduce rápido: 100% ⇒ 70% ⇒ 49% ⇒ 34.3% ⇒ 24.01% ⇒ 16.81% ⇒ 11.76%.

Recurrencia y autosimilitud

En los sistemas dinámicos discretos analizamos cómo cambia una función al aplicarse repetidamente sobre un valor inicial. En este estudio destacan dos ideas clave: recurrencia y autosimilitud.

La recurrencia describe la tendencia de un sistema a volver a un estado parecido al que tuvo antes, después de varias iteraciones. Es como observar un proceso que avanza, cambia y, tras cierto tiempo, regresa a una condición similar a la inicial. Por otro lado, la autosimilitud se refiere a que un mismo patrón se repite a diferentes escalas. Esto significa que, si ampliamos una parte de la gráfica del sistema, veremos figuras que se parecen al conjunto completo. Cuando ocurre este tipo de repetición, decimos que el sistema tiene una naturaleza fractal, es decir, que está formado por patrones que se repiten una y otra vez sin importar el nivel de detalle con el que se observen.

Por ejemplo, en modelos como la ecuación logística $x_{n+1} = rx(n) \cdot (1 - x(n))$, la autosimilitud aparece especialmente en la región caótica, donde los patrones se repiten al hacer zoom. Esta misma propiedad aparece de forma aún más notable en el conjunto de Mandelbrot, cuya frontera revela copias del patrón original a múltiples escalas.

Como ejemplos de autosimilitud que podemos observar, tenemos a los patrones que se autorreplican una y otra vez en la función de Weierstrass o bien en funciones como $f(x) = x^2 \cdot sen(1/x)$.

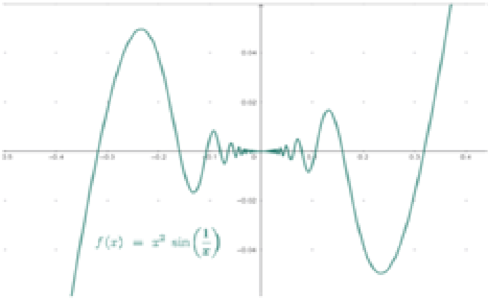


Figura. Ejemplo de autosimilitud en la función $f(x) = x^2 \cdot sen(1/x)$.

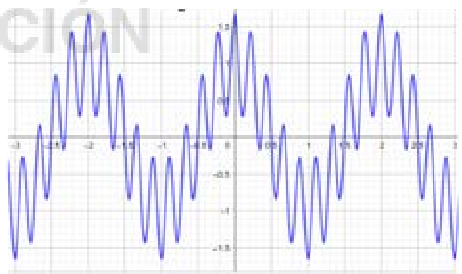


Figura. Función de Weierstrass. Ver recurso en: https://www.geogebra.org/m/cVvk5Pmh

En resumen, la recurrencia y la autosimilitud nos ayudan a entender cómo dentro de ciertos sistemas algunos procesos se repiten o mantienen una estructura parecida sin importar la escala en la que los observemos.

¿Qué es la recurrencia?

La recurrencia aparece cuando un sistema vuelve, ya sea de manera total o parcial, a un estado anterior después de cierto número de iteraciones. Dicho de forma sencilla, es como si el sistema "recordara" una parte

de su comportamiento pasado. Esto ocurre, por ejemplo, cuando aplicamos una función varias veces y los resultados comienzan a repetirse o a acercarse cada vez más a un mismo valor.

Un caso claro de recurrencia se observa en el movimiento mecánico de una rueda, puede ser la de una bicicleta o un engranaje, cada punto de la circunferencia vuelve exactamente al mismo lugar después de una vuelta completa. Esta repetición periódica del estado muestra que el sistema es recurrente.

Visualmente también podremos realizar una interpretación física de la recurrencia en el movimiento de una llanta, para ello imagina un punto rojo pintado en el borde de la rueda. Al iniciar el giro, el punto está arriba, a medida que la rueda gira, el punto baja, pasa por abajo, sube otra vez y al dar una vuelta completa, regresa a la posición inicial con lo cual se completa el ciclo recurrente.

Podemos describir matemáticamente el movimiento de la rueda con una función angular, por ejemplo:

$f(t) = sen(\Omega\, t)$
$f(t) = cos(\Omega\, t)$

Donde (Ω) es la velocidad angular y (t) el tiempo, la función se repite cada vuelta completa (2 π radianes).

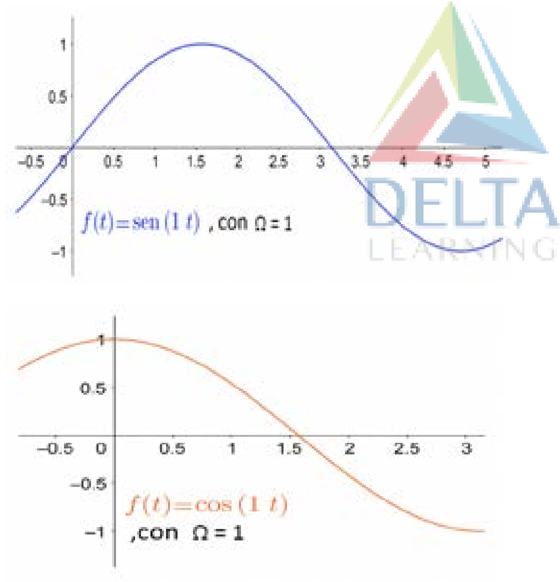


Figura. Cuando graficas *f(t) = sen (Ωt)* o *f(t) = cos (Ωt)* en el plano cartesiano, observarás una onda periódica que sube y baja de manera suave y repetitiva. Esta forma de onda representa cómo cambia la posición vertical u horizontal de un punto que gira en una rueda a velocidad angular constante (Ω).

Este es un ejemplo de recurrencia perfecta, ya que cada cierto intervalo de tiempo, el sistema retorna exactamente al mismo valor.

El movimiento de una rueda normalmente es un fenómeno continuo, porque gira sin detenerse. Pero también podemos estudiarlo como si avanzara en pequeños pasos tal como si fuera un fotograma, por ejemplo, observando su posición cada medio segundo o cada cierto número de grados. Cuando lo vemos en etapas o "saltos" regulares, el movimiento puede describirse como un sistema dinámico discreto, es decir, un proceso que se repite paso a paso. Matemáticamente, esto se puede expresar como:

$x_{n+1} = f(x_n)$, donde (x_n) representa el ángulo en el paso (n).

Con el tiempo, el sistema vuelve a valores ya visitados puesto que este describe una recurrencia periódica.

¿Qué es la autosimilitud?

La autosimilitud es una propiedad característica de ciertos objetos, funciones o figuras, especialmente de figuras geométricas como los fractales; en la que una parte del objeto se parece al todo, sin importar la escala a la que se observe. De esta forma al hacer "zoom" en cualquier fragmento, aparece una versión reducida (o ampliada) de la estructura completa.

La geometría euclidiana tradicional describe figuras regulares con dimensiones enteras (líneas, cuadrados, cubos), adecuadas para formas creadas por el ser humano. Sin embargo, muchas formas naturales son irregulares, complejas y con dimensiones fraccionarias, lo que requiere el estudio de la geometría fractal, la cual modela patrones que se repiten a diferentes escalas.

Ejemplos claros de autosimilitud aparecen en la naturaleza, la observamos en las nubes, montañas, ramas de árboles, así como en la estructura del brócoli y la coliflor, donde cada parte reproduce la forma general mediante una ramificación que se mantiene igual en diferentes niveles, esta propiedad es conocida como invariancia de escala.

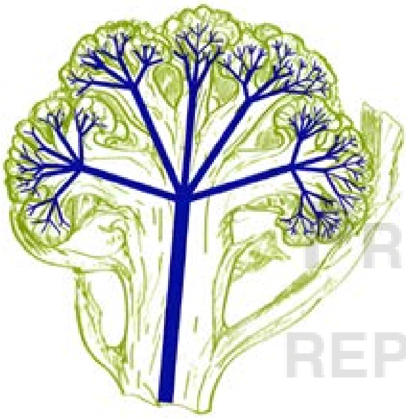


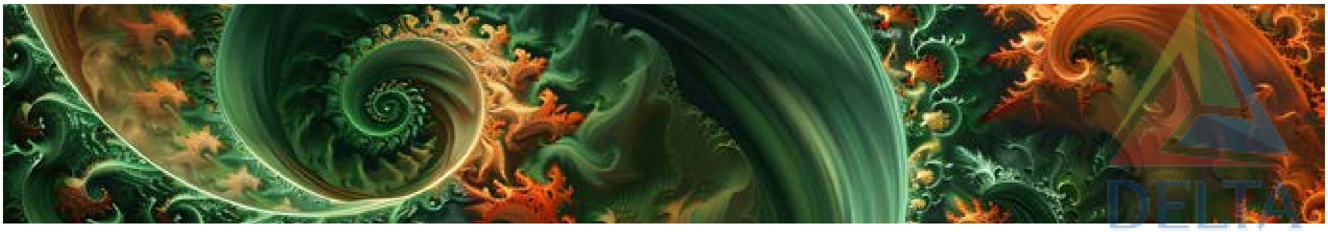
Figura. Representación de la fractalidad en el brócoli. https://vigyanpratibha.in/index.php/an-exploration-of-fractals/

Figura. Representación de la fractalidad en un helecho común.

Figura. Representación de la fractalidad en un brócoli romanesco.

La autosimilitud puede darse tanto al reducir como al ampliar una figura, de manera que el patrón se replica hacia lo muy pequeño y lo muy grande. Esta idea también aparece en algunos sistemas dinámicos naturales, incluyendo ciertos patrones biológicos como los ritmos del corazón, que muestran comportamientos con estructura fractal.

Por ejemplo, cuando miramos un electrocardiograma (ECG), los latidos muestran un patrón repetitivo: esa repetición corresponde a la recurrencia, mientras que el hecho de que cada latido mantenga una forma similar, aunque no idéntica; refleja autosimilitud. Un corazón sano no late de manera perfectamente regular; presenta una variabilidad natural que combina orden y pequeños rasgos caóticos, lo cual puede describirse mediante la geometría fractal.



Para analizar esta complejidad se usa la dimensión fractal (D), que indica qué tan irregular es una señal: una línea recta tiene D=1, una onda triangular D≈1.113 y una onda cuadrada D=2. Al aplicar este enfoque a los latidos, los médicos pueden identificar anomalías: una variabilidad excesiva puede apuntar a fibrilación auricular, mientras que una variabilidad demasiado baja puede indicar insuficiencia cardíaca congestiva.

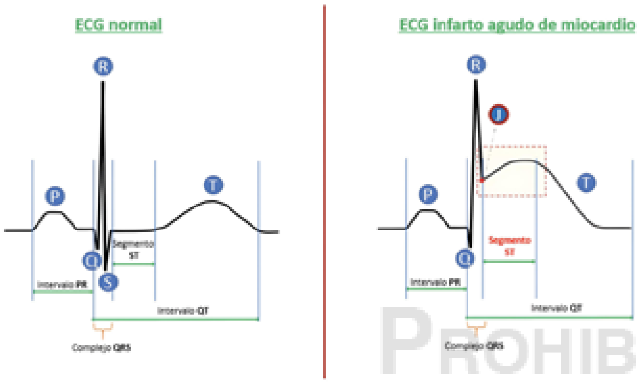


Figura. En los ECG, la fractalidad se utiliza para analizar la complejidad y variabilidad de la señal de electrocardiograma. Los ECG normales presentan una estructura fractal, con patrones de auto-similitud en la frecuencia. Sin embargo, en pacientes con enfermedades cardiovasculares, la estructura fractal se altera, lo que permite detectar anormalidades en la función cardíaca. En la siguiente imagen podemos comparar un ECG normal contra un ECG alterado https://misdoctores.es/cardiologia/electrocardiograma/anormal

Así, el estudio fractal del ECG ayuda a detectar problemas cardíacos antes de que se vuelvan graves.

La autosimilitud no se limita a ciencias o disciplinas de aplicación, también puede estudiarse dentro de temas conceptuales como la geometría. Un ejemplo geométrico de autosimilitud es el "Tapete de Sierpiński". En este fractal con forma de alfombra, la autosimilitud se manifiesta cuando se quita el cuadrado central, dejando cuadrados más pequeños que son réplicas exactas del tapete original. En donde cada uno de estos cuadrados más pequeños tiene el mismo patrón de alfombra que el tapete completo.

Para comprenderlo más fácil imagina un cuadrado de cualquier color, el cual es perfecto. Ahora, divide ese cuadrado en 9 cuadrados iguales más pequeños y remueve el cuadrado central. ¡Eso es el Tapete de Sierpiński! Pero no para ahí. Se repite el proceso con los 8 cuadrados restantes que están alrededor, dividiéndolos en 9 cuadrados más pequeños y removiendo el cuadrado central de cada uno.

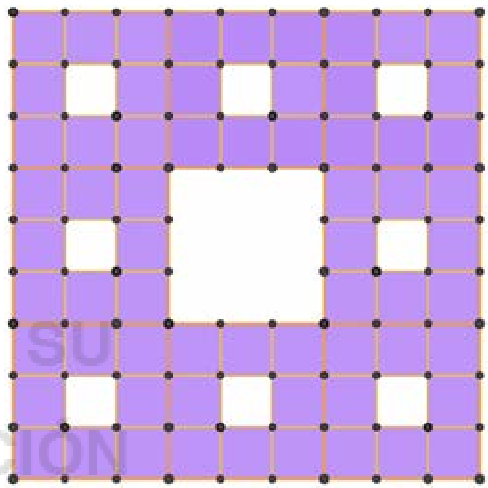


Figura. Tapete de Sierpiński (ver animación en el enlace: (https://www.geogebra.org/m/QHKFPrxc), como apoyo se puede ver el video: https://www.youtube.com/watch?v=sOvWsvxrIHI

¿Sabes qué es lo más increíble del Tapete de Sierpiński? Que cada cuadrado más pequeño es una réplica exacta del tapete original, pero a una escala menor. Es de esta forma en cómo se presenta la autosimilitud en el fractal. Es como si el tapete se estuviera replicando a sí mismo en diferentes tamaños.

Respecto al área y perímetro del cuadrado original ¿Qué pasa cuando se repite el proceso?, Cuando esto se repite, el área del tapete disminuye constantemente un poco cada vez. De hecho, el área tiende a 0 cuando se repite el proceso infinitas veces. Pero ¿qué pasa con el perímetro del fractal? Bueno, resulta que el perímetro aumenta mucho cada vez que se repite el proceso. De hecho, el perímetro tiende a infinito cuando se repite el proceso infinitas veces.

Atractores y caos

Un sistema dinámico discreto es aquel que evoluciona paso a paso aplicando la misma función repetidamente. Esto produce una secuencia de estados que permite estudiar cómo va cambiando el sistema con el tiempo. Al analizar la composición de funciones vimos que una función puede aplicarse sobre sí misma para generar esos estados sucesivos.

Con las ideas de recurrencia y autosimilitud aprendimos que muchos procesos repiten ciertas formas a diferentes escalas, como ocurre en los fractales: patrones sencillos que, al reproducirse, dan lugar a estructuras complejas pero ordenadas. Ahora veremos qué sucede cuando una función se itera muchas veces y aparecen comportamientos que, aunque parecen desordenados, en realidad siguen reglas internas. En este contexto surgen conceptos clave como los atractores y el caos, que muestran cómo un sistema puede pasar del orden al desorden y luego reorganizarse de maneras nuevas e inesperadas.

La vida está llena de ciclos repetitivos, desde los latidos del corazón, las estaciones del año, el ciclo día y noche o el movimiento de las órbitas planetarias. Sin embargo, muchos fenómenos no son totalmente predecibles: el clima a lo largo del día, los cambios de rumbo en el curso de los ríos o incluso nuestros pensamientos muestran variaciones caóticas. El caos no es simple desorden, sino una forma distinta de organización y belleza dentro de la complejidad que da paso a la vida.

La Teoría del Caos

En el siglo XX se desarrolló la Teoría del Caos, la cual estudia sistemas que, aun siguiendo reglas simples, muestran comportamientos muy complejos y difíciles de predecir. Su idea central es la sensibilidad a las condiciones iniciales: un cambio mínimo al inicio puede generar efectos enormes después. Esto se conoce como efecto mariposa.

La Teoría del Caos no está enfocada en estudiar la falta de orden, sino más bien un tipo de orden que es difícil de predecir. Estudia cómo algunos sistemas dinámicos que cambian con el tiempo (como el clima, el crecimiento de una población, o el movimiento de un péndulo) siguen ciertos patrones o reglas matemáticas simples, que pueden llegar a comportarse de forma muy compleja e impredecible, pues sus variables cambian de manera súbita y aparentemente aleatoria a tal punto que resulta difícil de predecir su comportamiento a largo plazo.

Definición
La Teoría del Caos establece que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden provocar cambios significativos en el comportamiento de un sistema.

Los sistemas caóticos no son aleatorios; su impredecibilidad tiene orden, pero un orden muy delicado ya que los sistemas caóticos son extremadamente sensibles a cualquier pequeño cambio en su punto de partida: incluso una variación mínima puede llevar a resultados completamente diferentes.

Por esta razón, aunque en teoría podríamos calcular lo que va a pasar, en la práctica es casi imposible, ya que cualquier pequeño error en las condiciones iniciales puede crecer mucho y cambiarlo todo. Ejemplos: el clima, el tráfico, el crecimiento poblacional, los mercados financieros o la trayectoria de un proyectil por la presencia de un fuerte viento.

La Teoría del Caos muestra que incluso en sistemas que parecen completamente impredecibles existe un tipo de orden oculto. Aunque estos fenómenos rebasan muchas veces lo que la ciencia puede calcular con exactitud, la teoría demuestra que, al simplificar procesos muy complejos, podemos descubrir las leyes que guían su comportamiento.

Actividad de APRENDIZAJE 2

Principio de la Nueva Escuela Mexicana

Ámbito

I. Lee cuidadosamente cada ejercicio y contesta lo que se te pide.

1. Imagina un sistema en el que pequeños cambios en el inicio pueden generar resultados muy diferentes. Investiga ejemplos cotidianos donde esto ocurra. No olvides explicar por qué estos sistemas son sensibles a las condiciones iniciales.

____

____

2. Investiga en la red cómo pueden surgir patrones en sistemas que parecen aleatorios. Por ejemplo, analiza cómo es que se da la distribución de plantas en un ecosistema, el movimiento de partículas en un fluido o el comportamiento de las acciones en la bolsa de valores. Así también investiga cómo es que estos patrones pueden ser estudiados utilizando conceptos de la Teoría del Caos.

____

____

II. Investiga y analiza 3 ejemplos de comportamientos periódicos y otros 3 ejemplos de comportamientos, aperiódicos e inestables en diversos ámbitos, estos pueden presentarse como fenómenos físicos, químicos, naturales o sociales. Esto incluye la mecánica, termodinámica, electromagnetismo, reacciones químicas, equilibrios, cinética, clima, ecosistemas, geología, economía, demografía y psicología.

Para buscar ejemplos, fíjate en la estabilidad y sensibilidad de los sistemas (qué tan estables o sensibles son a los cambios) y en los tipos de patrones que muestran: si son patrones regulares (periódicos) o irregulares (aperiódicos).

III. Conforme a lo que hemos estudiado responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuáles son las características clave de cada comportamiento?

____

2. ¿Cómo se relacionan estos comportamientos con la Teoría del Caos?

____

3. ¿Qué factores influyen en la estabilidad o inestabilidad de los sistemas?

____

4. ¿Cómo se pueden aplicar estos conceptos en la vida real?

____

Atractores como orden dentro del caos

Aunque los sistemas caóticos parecen desordenados, su comportamiento no es completamente al azar. Cuando analizamos cómo evolucionan en el tiempo, vemos que sus trayectorias no se dispersan infinitamente, sino que tienden a concentrarse en ciertas zonas del espacio donde el sistema "se queda" con mayor frecuencia. A estas regiones se les llama atractores. Por el contrario, los repulsores son áreas de las que el sistema se aleja de manera natural.

Un ejemplo sencillo es imaginar una bolita moviéndose sobre una superficie irregular: si hay una hondonada, la bolita tenderá a quedarse ahí (atractor); si hay una protuberancia, la bolita evitará esa zona y se alejará (repulsor), así ocurre con muchos sistemas caóticos: parecen libres y desordenados, pero en realidad siguen caminos que los llevan, una y otra vez, hacia sus atractores.

Todo sistema físico, biológico o matemático puede describirse mediante variables que cambian con el tiempo. Cada combinación posible de esas variables representa un "estado o momento exacto de un sistema dinámico", y el conjunto de todas las combinaciones o estados posibles forma el espacio de estados.

Para entender esto, primero necesitamos el concepto de espacio de estados, que es el conjunto de todas las configuraciones posibles de un sistema. Cada punto del espacio de estados representa un "momento" del sistema. Por ejemplo, un péndulo se describe con dos variables (posición y velocidad), por lo que su espacio de estados se representa como puntos en un plano. En resumen, el espacio de estados es un "mapa" que muestra todas las configuraciones posibles de regiones en las que puede "converger o permanecer" el sistema.

Ahora bien ¿qué significa converger hacia regiones específicas? Cuando un sistema caótico evoluciona con el tiempo, su estado se va moviendo dentro del espacio de estados, dejando una trayectoria que va dibujando el recorrido dentro de la cual un sistema caótico tiende a permanecer, eso es lo que quiere decir "convergen hacia regiones específicas". Ejemplos visuales de esta idea son los patrones de Chladni o las líneas de un campo magnético, donde el material se organiza siguiendo zonas preferenciales.

Ahora podemos explicar qué es un atractor, este puede ser visto como una zona o conjunto de puntos dentro del espacio de estados hacia donde las trayectorias del sistema tienden a dirigirse con el paso del tiempo. Una vez que el sistema entra en esa zona, suele quedarse alrededor de ella, moviéndose de distintas formas, pero sin alejarse demasiado.

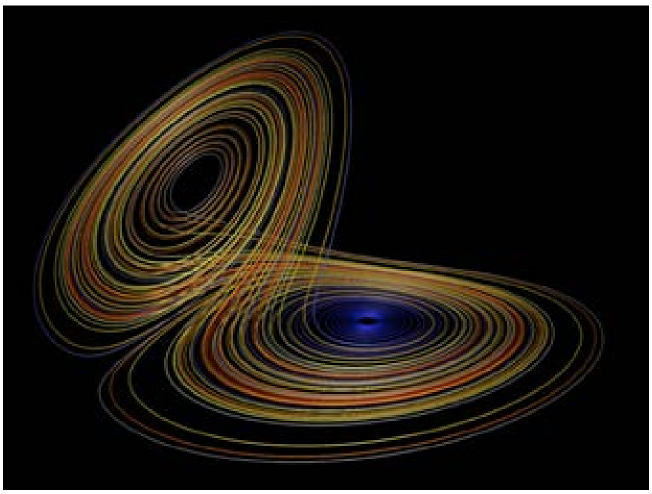
Como apoyo didáctico puedes ver el siguiente video.

https://is.gd/IgmnzZ

Aunque al principio un sistema caótico puede parecer completamente desordenado, las trayectorias que genera alrededor de un atractor muestran que sí existe un tipo de orden oculto. Por eso se dice que un atractor es como un "imán invisible": no empuja ni jala realmente, pero describe la forma general del comportamiento del sistema.

Existen tres tipos principales de atractores:

a) **Atractor puntual:** el sistema converge a un solo punto (ej. un péndulo que se detiene en el centro).
b) **Atractor periódico:** el sistema entra en un ciclo repetitivo (ej. estaciones del año).
c) **Atractor extraño:** presenta un patrón complejo y caótico, pero restringido a una forma estable (ej. el Atractor de Lorenz, con su famosa figura de "alas de mariposa").



Expresiones matemáticas del caos

En matemáticas, una forma de representar los fenómenos caóticos observados en la naturaleza es mediante funciones iterativas simples, es decir, funciones que se aplican una y otra vez sobre su propio resultado. En cada paso, el resultado anterior se convierte en la entrada de la siguiente iteración. Ejemplos de funciones iterativas simples tenemos

a) **Función cuadrática:** $f(x) = x^2 + c$, en donde c es una constante.
b) **Función logística:** $f(x) = r \cdot x_n \cdot (1 - x)$, donde r es una constante y x_n es el valor de la función en la iteración actual.
c) **Función de Gauss:** $f(x) = e^{-x^2}$

Entre las funciones iterativas más interesantes es la función logística $x_{t+1} = r \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$, porque puede mostrar comportamientos caóticos, dependiendo de la sensibilidad a las condiciones iniciales y del valor del parámetro (r). Fue creada por Verhulst para modelar el crecimiento poblacional y más tarde popularizada por Robert May.

May demostró que factores como la tasa de crecimiento, la disponibilidad de alimento y la presencia de depredadores determinan la estabilidad de una población. Si una población crece demasiado, los recursos disminuyen, aumenta la competencia y la población retrocede hasta restablecerse. Así, aunque el sistema puede mostrar variaciones complejas, tiende a autonivelarse alrededor de un valor estable bajo ciertas condiciones.

La forma en que se representa la Teoría del Caos en la función logística es mediante una ecuación recursiva conocida como "Mapa Logístico", la cual tiene la misma forma que la ecuación logística de Verhulst $x_{n+1} = r \times x_n \times (1 - x_n)$. Donde x_n+1) es el valor de la población en la iteración n+1, (x_n) representa el tamaño de la población en la generación o iteración (n), y (r) es el parámetro de crecimiento, que controla la tasa de crecimiento dinámica del sistema y puede variar entre 0 y 4.

Este mapa logístico describe cómo cambia una población de una generación a la siguiente, considerando la tasa de crecimiento y la capacidad máxima del ambiente. Funciona de forma recursiva, aplicando la misma regla iterativamente. Para entender mejor cómo se estudian los fenómenos caóticos y no caóticos, veamos un ejemplo inspirado en las investigaciones del biólogo David G. Chapman (1914–2002) sobre el crecimiento de poblaciones de conejos.

Imagina una población de conejos que se reproduce cada año. Cada pareja tiene cuatro crías y luego mueren. Si no existieran límites de espacio, alimento o depredadores, la población de conejos crecería sin control. Cada año habría el doble de conejos que el anterior. Este tipo de comportamiento se conoce como un crecimiento exponencial y puede modelarse sencillamente con una función iterativa: $P(t+1)=2P(t)$, donde $P(t)$ es la población en el año "t" y P(t+1) es la población en el año siguiente. Por ejemplo, si comenzamos con 2 conejos, la población crece de la siguiente manera:

Año 1: $P(1) = 2 \Rightarrow 2$ conejos.
Año 2: $P(2) = 2P(1) = 4 \Rightarrow 4$ conejos.
Año 3: $P(3) = 2P(2) = 8 \Rightarrow 8$ conejos.

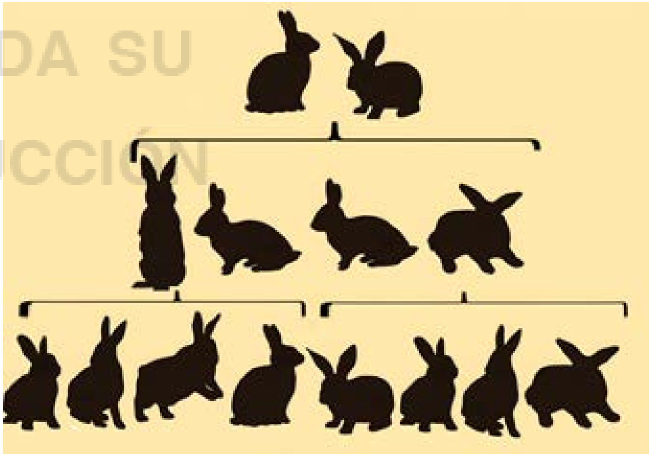


Figura. Si el crecimiento de la población de conejos continuara de esta manera, dicha población se dispararía sin límite, algo imposible en el mundo real.

El modelo anterior nos muestra cómo funciona un sistema no caótico, es decir, uno donde las reglas son simples y los resultados son completamente predecibles. Por ejemplo, si dividimos a la población de conejos en dos grupos y los dejamos reproducirse por separado, cada grupo se duplicará igual que el otro. Si después sumamos ambos grupos, el total será el mismo que si hubieran estado juntos desde el principio. Todo sigue una regla matemática perfecta y sin sorpresas.

Sin embargo, en la vida real, los sistemas biológicos son más complejos debido a factores externos como enfermedades, depredadores, clima, etcétera, lo que los hace impredecibles y caóticos. Como segundo ejemplo, calculemos la fórmula del mapa logístico $x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$ de una población de hámsteres con valores que no son tan exactos, con $r = 4$ y $x_0 = 0.0625$, en donde, si la capacidad de carga máxima es de 1000 individuos, entonces la población inicial sería de $0.0625 \times 1000 = 62.5$ individuos.

Sustituyendo valores, obtendríamos las primeras iteraciones. Para realizar esta gráfica de puntos de dispersión en Excel se utilizaron 100 iteraciones. Gracias al número de iteraciones, es visible cómo el caos se presenta como factor de crecimiento y decrecimiento en las poblaciones de hámsteres.

n	$x(0)$	$x(n+1)$
0	0.063	0.234
1	0.234	0.717
2	0.717	0.810

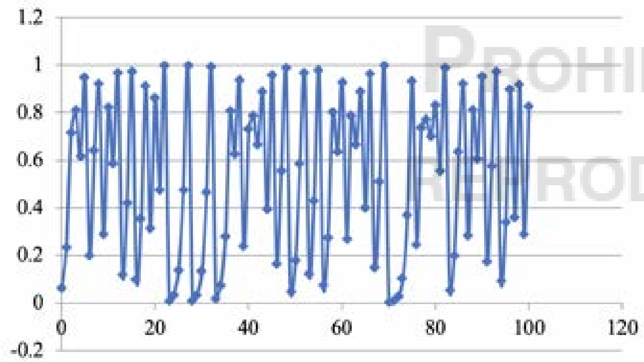


Figura. La gráfica de puntos de dispersión que se obtiene al plotear los valores de x(n) contra x(n+1) en el **mapa logístico** muestra la periodicidad en el crecimiento poblacional y la dispersión de los puntos indica la presencia de caos en el sistema, lo que significa que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a resultados muy diferentes.

En matemáticas, el caos aparece al aplicar repetidamente una función sobre su propio resultado. En donde al modificar ligeramente la tasa de crecimiento (r) pueden observarse comportamientos muy diferentes:

- Si (r) es pequeño, el sistema se estabiliza (no caótico).
- Si (r) aumenta, aparecen ciclos (atractores periódicos).
- Si (r) sigue aumentando, el sistema se vuelve caótico (atractores extraños).

Este tipo de comportamiento se puede simular fácilmente en herramientas como GeoGebra, Desmos o Excel, visualizando cómo pequeñas variaciones en (r) cambian drásticamente el resultado.

Para estudiar cómo cambia el crecimiento de las poblaciones conforme las variaciones de su ambiente, los científicos utilizan un modelo más avanzado llamado "modelo logístico". A diferencia del mapa logístico, este modelo tiene en cuenta no solo el crecimiento con base en el número de individuos, sino también los límites naturales que frenan ese crecimiento. El modelo logístico se expresa mediante la siguiente ecuación:

$P_{t+1} = P(t) + r \cdot P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$, en donde:

$P(t)$: es la población en el año (t).

r: es la tasa de nacimiento.

K: es la capacidad de carga máxima (también conocida como límite de crecimiento esta hace referencia al número máximo de individuos que puede sostener un ecosistema o un hábitat sin sufrir daños irreversibles.

$\frac{P(t)}{K}$: es la proporción de la población respecto a la capacidad de carga.

Este modelo refleja que, cuando la población se acerca a su límite (K), el crecimiento se ralentiza y puede incluso estabilizarse o colapsar si hay demasiados individuos. Para analizar cómo funciona un ***modelo logístico***, veamos el siguiente ejemplo en donde se inicia con 20 individuos de una especie, una tasa de nacimiento (r) y con una capacidad de carga máxima (k) igual a 32.

Ejemplo. Si se contempla una población inicial de $P(0) = 20$ con $r = 2$ y $K = 32$ tendremos:

Año 1: $P(1) = 20 + 2(20)(1\text{-}20/32) = 12$
Año 2: $P(2) = 12 + 2(12)(1\text{-}12/32) = 12$
Año 3: $P(3) = 12 + 2(12)(1\text{-}12/32) = 12$

Si dentro de esta misma ecuación se incluye la tasa de muerte (d), la ecuación se convierte en:

$P(t+1) = P(t) + rP(t)(1 - P(t)/K) - dP(t)$

Ejemplo. Si se contempla una población inicial de $P(0) = 20$ con $r = 2$, $d = 0.4$ y $K = 32$:
Año 1: $P(1)=20+2(20)(1−20/32)−0.4(20)=12$
Año 2: $P(2)=12+2(12)(1−12/32)−0.4(12)=12$

Como ves, aun no podemos ver cómo se puede observar el caos dentro de los resultados, pero si se duplica la capacidad de carga (K = 64), los resultados de la ecuación se convierten en:

Año 1: $P(1)$=20+2(20)(1-20/64)-0.4(20)=14.25
Año 2: $P(2)$=14.25+2(14.25)(1-14.25/64)-0.4(14.25)=15.0181

Por lo tanto, si dejamos que los conejos se reproduzcan con una tasa de nacimiento alta y una tasa de muerte baja, la población crece rápidamente. Pero si aumentamos la tasa de muerte o disminuimos la capacidad del hábitat, la población se estabiliza.

La Teoría del Caos ha revolucionado la forma en la que entendemos el mundo, permitiéndonos explicar fenómenos complejos en diversas áreas, desde el Big Bang en la Física hasta nuevos fenómenos climáticos en la meteorología.

Con la finalidad de reforzar lo aprendido contesta lo siguiente.

I. Lee cuidadosamente las siguientes afirmaciones e indica si son verdaderas (V) o falsas (F).

	Verdadero	Falso
1. Dentro de la naturaleza ¿El caos siempre es sinónimo de desorden total?	_________	_________
2. Conforme la sensibilidad de un sistema ¿Un pequeño cambio siempre causa un efecto pequeño?	_________	_________
3. El caos puede observarse en fenómenos naturales, como en el clima.	_________	_________
4. Se puede predecir matemáticamente con toda exactitud lo que sucederá en un sistema caótico.	_________	_________
5. El caos sigue patrones predecibles, aunque sean complejos.	_________	_________

II. Relaciona cada concepto con el ejemplo que mejor lo represente. Para ello, selecciona la letra correspondiente y escríbela en el paréntesis.

Conceptos

a) Sistema caótico
b) Mapa logístico
c) Sistema estático
d) Sistema dinámico
e) Sistemas dinámicos continuos
f) Sistemas dinámicos discretos
g) Composición de funciones
h) Recurrencia y autosimilitud
i) Atractores y caos
j) Teoría del caos

Ejemplo

Evolución del clima a lo largo del tiempo siguiendo ecuaciones diferenciales, cambiando en cada instante. ( )

Sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, donde pequeñas variaciones producen cambios enormes. ( )

Proceso donde una función se aplica repetidamente sobre su propio resultado, generando patrones que se repiten a diferentes escalas. ( )

Modelo donde el estado cambia en pasos separados, por ejemplo, generación por generación o año con año. ( )

Modelo matemático discreto que describe cómo evoluciona una población de una generación a la siguiente según una regla de recurrencia. ( )

Un sistema que no cambia con el tiempo; su estado permanece igual sin importar el instante en que se observe. ( )

Aplicar una función después de otra para representar procesos encadenados, como transformar datos y luego normalizarlos. ( )

Un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo, dependiendo de reglas o ecuaciones. ( )

Regiones hacia las que tienden los sistemas caóticos y donde se concentra su comportamiento a largo plazo, como el atractor de Lorenz. ( )

Rama de la matemática que estudia los sistemas deterministas con comportamiento impredecible. ( )

III. Contesta correctamente el siguiente ejercicio.

Se tiene un mapa logístico expresado con su clásica ecuación $x_{n+1} = r \cdot x_n (1-x_n)$ que modela el crecimiento poblacional, en donde "r" es la tasa de nacimiento y x_n es la población en la n-ésima generación. Si r=3.7 y x_0=0.5, realiza las primeras 10 iteraciones del mapa logístico. Posteriormente analiza estos valores y responde ¿Qué observas sobre el comportamiento de la secuencia?