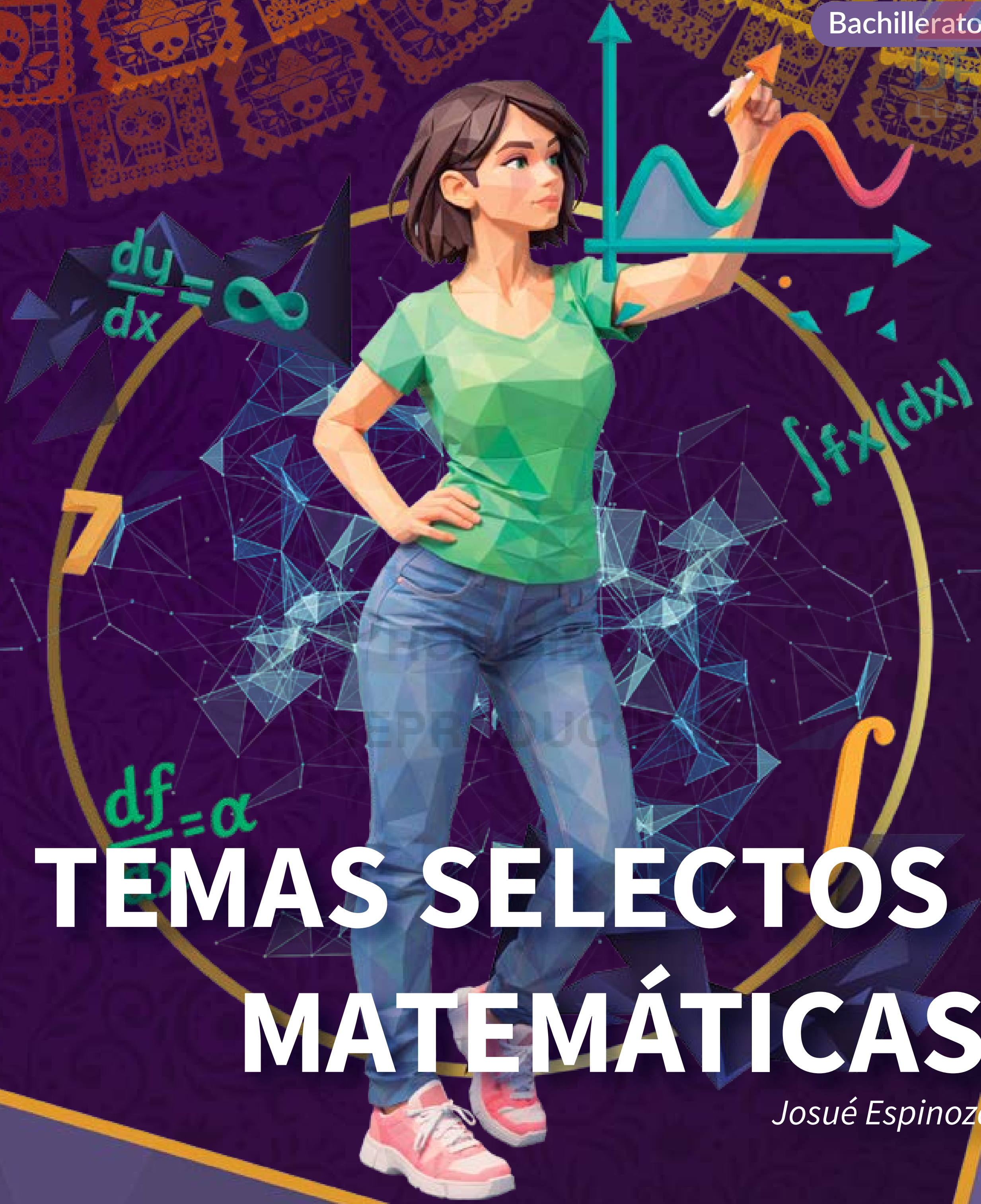
SERIE TLALMANALLI

Bachillerato Tecnológico



TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS III

Josué Espinoza Rangel

NUEVA ESCUELA MEXICANA

DELTA® LEARNING

Temas Selectos de Matemáticas III

Primera edición 2026
ISBN:
D.R. © 2019, Delta Learning®
José Ma. Morelos No.18, Col. Pilares, C.P. 52179, Metepec, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro número: 4041
Contacto: 800 450 7676
Correo: contacto@deltalearning.com.mx

Dirección editorial: Delta Learning®

Editor en jefe: Zito Octavio Alejandre Rosas

Autor: Josué Espinoza Rangel

Correctora: Perla Vallejo Lucas

Diseño: Gabriel de la Rosa y el equipo de Argonauta Comunicación

Portada: Elio Teutli Cortés

Imágenes: Freepik y Adobe Stock

Producción: Lizbeth López Reyes

Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces provistos en este libro no pertenecen a Delta Learning®. Por tanto, no tenemos ningún control sobre la información que los sitios web están dando en un momento determinado y por consiguiente no garantizamos la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque esta información se compila con gran cuidado y se actualiza continuamente, no asumimos ninguna responsabilidad de que sea correcta, completa o actualizada.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan las opiniones de los mismos y, a menos que se indique específicamente, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material en cualquiera de los sitios incluidos en este libro no está autorizada, ya que el material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos están reservados a sus respectivos propietarios y Delta Learning® no se responsabiliza por nada de lo que se muestra en los enlaces provistos.

deltalearning.com.mx

Impreso en México

Presentación

El libro de ***Temas Selectos de Matemáticas III*** para Bachillerato Tecnológico, ha sido concebido como una guía integral para el estudio del cálculo y sus aplicaciones. Está estructurado en tres parciales que permiten un avance progresivo en la comprensión de los conceptos fundamentales y su conexión con fenómenos reales.

En el parcial 1, se introduce al lector en el análisis de las sucesiones de números reales, los límites y sus propiedades, así como en los principales teoremas que sustentan el cálculo. Estos contenidos se complementan con la construcción de modelos matemáticos de fenómenos, que muestran cómo la abstracción numérica se convierte en herramienta para interpretar la realidad.

El parcial 2 profundiza en la noción de tasa de variación y el comportamiento de funciones, elementos esenciales para comprender la dinámica de procesos naturales y sociales. Asimismo, se aborda el cálculo de áreas bajo las curvas, un tema que vincula la teoría con aplicaciones prácticas en física, economía y otras disciplinas.

Finalmente, el parcial 3 se centra en el teorema fundamental del cálculo, piedra angular que articula a la derivada y la integral. A partir de este resultado, se exploran aplicaciones avanzadas de la integral y, se introducen las ecuaciones diferenciales, herramientas poderosas para modelar fenómenos complejos como el crecimiento poblacional, la propagación de enfermedades o el movimiento de sistemas físicos.

Este libro busca no sólo transmitir conocimientos técnicos, sino también fomentar la reflexión crítica y la capacidad de aplicar el cálculo en diversos contextos. Cada capítulo invita al lector a descubrir la belleza de las matemáticas como lenguaje universal para comprender y transformar el mundo.

La Nueva Escuela Mexicana

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) tiene como principio fundamental que la educación sea entendida para toda la vida bajo el concepto de aprender a aprender, con actualización continua, adaptación a los cambios y aprendizaje permanente con el compromiso de brindar calidad en la enseñanza.

En la Editorial Delta Learning tenemos como misión crear materiales educativos de calidad, que cumplan los fundamentos del modelo educativo vigente de la Educación Media Superior, adoptando a la NEM como un eje rector en el diseño de nuestros libros, con el objetivo de promover aprendizajes de excelencia, inclusivos, pluriculturales, colaborativos y equitativos durante la formación de los bachilleres.

Haciendo suyo el reto, la Editorial Delta Learning desarrolla los contenidos de cada uno de sus ejemplares con los siguientes Principios que fundamentan la NEM:

Fomento de la identidad con México. El amor a la Patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso con los valores plasmados en la Constitución Política.

Responsabilidad ciudadana. El aceptar los derechos y deberes personales y comunes, respetar los valores cívicos como la honestidad, el respeto, la justicia, la solidaridad, la reciprocidad, la lealtad, la libertad, la equidad y la gratitud.

Honestidad. Es un compromiso fundamental para cumplir con la responsabilidad social, lo que permite que la sociedad se desarrolle con base en la confianza y en el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.

Participación en la transformación de la sociedad. El sentido social de la educación implica construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superen la indiferencia y la apatía para lograr la transformación de la sociedad en conjunto.

Respeto de la dignidad humana. El desarrollo integral del individuo promueve el ejercicio pleno y responsable de sus capacidades, el respeto a la dignidad y derechos humanos de las personas es una manera de demostrarlo.

Promoción de la interculturalidad. La comprensión y el aprecio por la diversidad cultural y lingüística, por el diálogo e intercambio intercultural sobre una base de equidad y respeto mutuo.

Promoción de la cultura de paz. La construcción de un diálogo constructivo, solidario y en búsqueda de acuerdos, permiten una solución no violenta a los conflictos y la convivencia en un marco de respeto a las diferencias.

Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente. El desarrollo de una conciencia ambiental sólida que favorezca la protección y conservación del medio ambiente, propiciando el desarrollo sostenible y reduciendo los efectos del cambio climático.

Estructura del libro

El presente libro se encuentra estructurado en 3 parciales en los cuales encontrarás desarrolladas las progresiones en apertura, desarrollo y cierre, asimismo cuenta con las siguientes secciones:

Evaluación diagnóstica: Esta se realiza al inicio del libro y tiene la finalidad de recuperar los conocimientos y habilidades necesarias para abordar los contenidos específicos de cada una de las progresiones de aprendizaje.

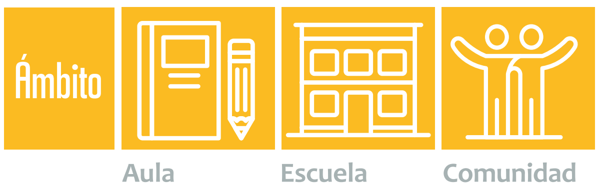
Actividades de aprendizaje: En las cuales pondrás a prueba los conocimientos y habilidades desarrollados en cada uno de los temas. Las actividades estarán vinculadas a los **ámbitos** del **Nuevo Modelo Educativo (NME)** de la **Escuela Media Superior (EMS)**, **aula – escuela – comunidad,** así como a alguno de los principios de la **Nueva Escuela Mexicana (NEM)** por ser este un programa de estudios orientado a recuperar el sentido de pertenencia a los valores que te identifican con nuestro país.

En cada actividad de aprendizaje encontrarás un tablero como el que se presenta a la derecha de este párrafo, en el cual podrás identificar a través de sus iconos específicos, tanto los **tres ámbitos del NME de la EMS**, como los **ocho principios de la NEM** a los que corresponda dicha actividad.

A continuación te mostramos las secciones de este tablero así como el significado de cada icono:

En la parte superior del tablero se encuentra una barra gris donde estará indicado el número de actividad.

A continuación verás una barra amarilla donde se indican los tres ámbitos (NME/EMS).



Por último, verás una sección de color naranja donde están indicados los principios de la NEM.

Fomento de la identidad con México

Responsabilidad ciudadana

Honestidad

Participación en la transformación de la sociedad

Respeto de la dignidad humana

Promoción de la interculturalidad

Promoción de la cultura de paz

Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente

Para identificar el ámbito y principio correspondiente a cada actividad verás su respectivo icono en color amarillo y naranja y el resto de los iconos en un tono opaco.

En el ejemplo que ves a la derecha, el **ámbito** corresponde a la categoría **COMUNIDAD y el principio de la NEM corresponde al Fomento de la identidad con México.**

Actividades Transversales: Actividades orientadas a facilitar el proceso de vinculación de los conocimientos y habilidades de los recursos sociocognitivos con las distintas áreas de conocimiento.

Actividades QR interactivas: Actividades que asocian la tecnología con los conocimientos desarrollados en los temas, sólo se escanea el código QR y listo, se pueden reforzar los conocimientos y habilidades.

Realidad aumentada: Siempre es importante que todos los sentidos estén inmersos en el proceso de enseñanza – aprendizaje, las actividades de realidad aumentada dan una visión gráfica y vívida de los aprendizajes que se desean desarrollar en el libro.

Actividades Socioemocionales El curriculum ampliado no puede faltar dentro del contenido del texto, por ello, se incluyen actividades destinadas a desarrollar habilidades planteadas por los recursos socioemocionales del NME.

Adicionalmente podrás encontrar las siguientes secciones que te permitirán ampliar y afirmar los aprendizajes obtenidos en el curso.

Habilidad LECTORA

GLOSARIO

Evaluación DEL PARCIAL

BIBLIOGRAFÍA

Cuando visualices el siguiente ícono en alguna de las progresiones de aprendizaje, el código QR que aparezca junto a él tendrá una actividad perteneciente al Programa Aula Escuela Comunidad. Finalmente, te presentamos el ícono que señala el número de progresión al que pertence cada tema.

Proyecto Escolar Comunitario

Progresión 1

Progresiones

El libro se encuentra apegado al NME de la EMS y desarrolla cada una de las progresiones del programa de **Temas Selectos de Matemáticas III.**

1. Explora las propiedades y criterios específicos que ayudan a determinar el comportamiento de una sucesión de números reales (convergente, divergente y oscilante); considerando ejemplos concretos.
2. Asume propiedades y aplica teoremas sobre límites para comprender el comportamiento local de fenómenos que son modelados a través de funciones reales de variable real.
3. Modela diversos fenómenos naturales o sociales empleando diferentes tipos de funciones reales de variable real, considerando la continuidad de la función o sus posibles discontinuidades.
4. Cuantifica e interpreta las tasas de variación de fenómenos sociales o naturales empleando la noción de derivada.
5. Calcula e interpreta puntos máximos y mínimos locales, puntos de concavidad y convexidad, y demás elementos que permiten entender el comportamiento de una función que modela un fenómeno de interés social o natural asumiendo y aplicando teoremas del cálculo diferencial.
6. Estudia el problema del cálculo de áreas de superficies determinadas por funciones simples y aplica propiedades básicas de la integral definida para poder encontrar dichas áreas; por ejemplo, que la integral de la suma de dos funciones integrables es la suma de las integrales o que la integral de una función por una constante es la constante por la integral de la función, etcétera.
7. Analiza el teorema fundamental del cálculo para comprender que la derivación y la integración son procesos inversos.
8. Revisa alguna aplicación de la integral como pueden ser el cálculo de volúmenes de revolución, el concepto de trabajo en las ciencias naturales o la longitud de arco, asumiendo teoremas que les permitan hacer los cálculos necesarios.
9. Modela situaciones utilizando ecuaciones diferenciales de la forma $df/dx = ax$, resolviéndolas de forma directa con el cálculo de integrales y considera que para modelar otras clases de fenómenos se requiere en ocasiones de la aplicación de métodos numéricos y/o de la asistencia de una computadora (verificando que las hipótesis de los teoremas con los que construyeron los programas utilizados se satisfacen), y que, incluso, otros fenómenos a modelar pueden tener un comportamiento caótico debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Índice

Pág.

Evaluación DIAGNÓSTICA

Resuelve de manera clara y ordenada. Muestra todos los pasos necesarios en cada operación.

I. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$$
$$g(x) = -x^2 + 4x + 1$$
$$h(x) = x - 2$$

Realiza las operaciones indicadas y simplifica completamente las siguientes expresiones:

1. $f(x) + g(x) - h(x)$
2. $g(x) \cdot h(x)$
3. $\frac{f(x)}{h(x)}$
4. $f(g(x))$
5. $h(f(x))$

II. Explica con tus propias palabras qué es una asíntota y realiza un bosquejo de una función que tenga al menos dos tipos diferentes de asíntotas (vertical y horizontal o vertical y oblicua).

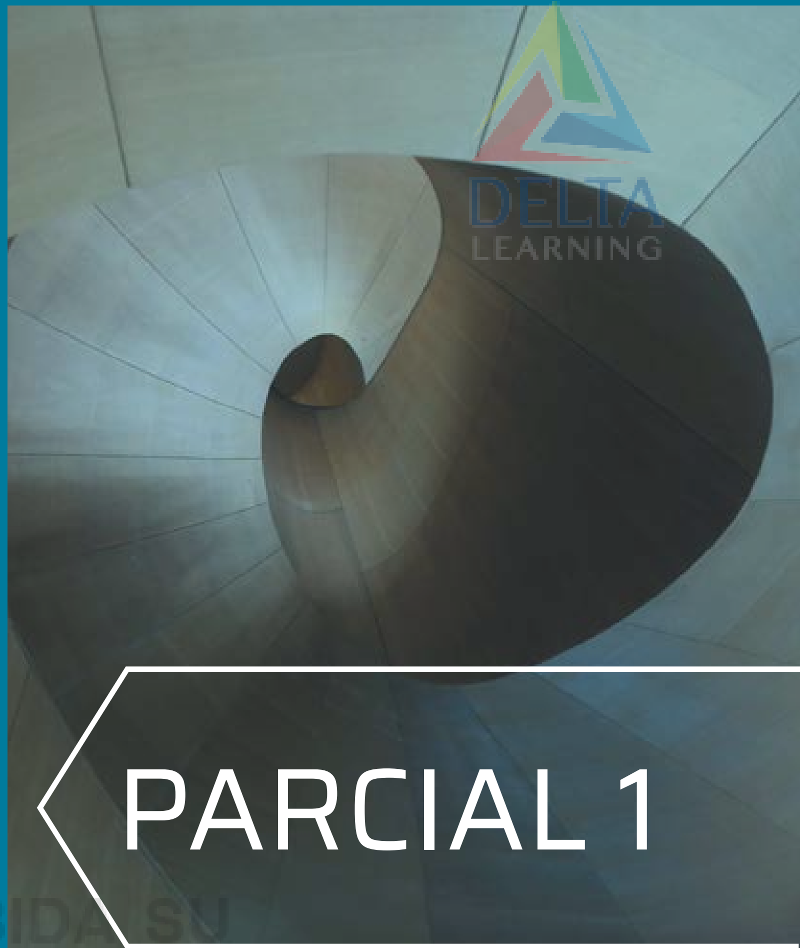
____
____
____
____

III. Evalúa las siguientes funciones en los valores indicados. Si la función no está definida para algún valor, escribe "indefinida" o "no existe".

1. $f(x) = 4x - 3$
   a) $f(0)$ = __________
   b) $f(2)$ = __________
   c) $f(4)$ = __________
   d) $f(-1)$ = __________

2. $g(x) = \sqrt{x+1}$
   a) $g(0)$ = __________
   b) $g(2)$ = __________
   c) $g(4)$ = __________
   d) $g(-1)$ = __________

3. $h(x) = \frac{2x-1}{x+3}$
   a) $h(0)$ = __________
   b) $h(2)$ = __________
   c) $h(4)$ = __________
   d) $h(-1)$ = __________



Categoría de aprendizaje:
- C2. Procesos de intuición y razonamiento

Subcategorías:
- S1. Capacidad para observar y conjeturar
- S2. Pensamiento intuitivo

Metas de aprendizaje:
- C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- C2M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.

Categorías de aprendizaje:
- C3. Solución de problemas y modelación

Subcategorías:
- S2. Construcción de modelos

Metas de aprendizaje:
- C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.

Categorías de aprendizaje:
- C4. Interacción y lenguaje matemático

Subcategorías:
- S1. Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico.
- S2. Negociación de significados.
- S3. Ambiente matemático de comunicación.

Metas de aprendizaje:
- C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente los lenguajes matemático y natural.
- C4M3. Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.

Aprendizaje trayectoria:
1. Aplica procedimientos algorítmicos e interpreta sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
2. Observa, intuye, conjetura y argumenta a favor o en contra de afirmaciones matemáticas, tanto teóricas como de aplicación en áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos o recursos socioemocionales, así debatir y contrastar ideas con sus pares.
3. Analiza situaciones y problemas, discerniendo las variables de interés para el estudio, llevando a cabo la verificación requerida de las hipótesis para la aplicación de los objetos, métodos y conceptos matemáticos utilizados, con la finalidad de modelar fenómenos o resolver problemas.
4. Describe, interpreta y comunica con claridad ideas, situaciones y fenómenos propios de la matemática, de las ciencias naturales, experimentales, de la tecnología, de las ciencias sociales y de su entorno, empleando un lenguaje matemático riguroso.

Progresiones de aprendizaje:
1. Explora las propiedades y criterios específicos que ayudan a determinar el comportamiento de una sucesión de números reales (convergente, divergente y oscilante); considerando ejemplos concretos.
2. Asume propiedades y aplica teoremas sobre límites para comprender el comportamiento local de fenómenos que son modelados a través de funciones reales de variable real.
3. Modela diversos fenómenos naturales o sociales empleando diferentes tipos de funciones reales de variable real, considerando la continuidad de la función o sus posibles discontinuidades.

PRESENTACIÓN DEL PRIMER PARCIAL

Este parcial explora los fundamentos que conectan el álgebra con el análisis matemático. Comenzaremos estudiando las sucesiones de números reales: su comportamiento, convergencia, divergencia y oscilación. Aprenderás a identificar si una sucesión se acerca a un valor fijo, crece indefinidamente o se mantiene en constante variación.

Posteriormente, trabajaremos el concepto central de límite, sus propiedades, teoremas principales (como el teorema de estricción o del sándwich) y su aplicación en funciones trigonométricas e indeterminaciones. Este concepto no es solo abstracto: interpretaremos los límites en contextos reales, observando su utilidad para describir comportamientos en situaciones físicas, económicas y sociales.

Finalmente, modelaremos fenómenos continuos y discontinuos, clasificando tipos de discontinuidad e identificando asíntotas. Aplicaremos estos conocimientos para construir modelos matemáticos sencillos que representen fenómenos naturales —como la variación de temperatura o el movimiento de un proyectil— y sociales —como la difusión de información en redes o cambios en precios ante regulaciones.

El objetivo es que comprendas cómo la matemática sirve para analizar, predecir y representar comportamientos en el mundo real, usando herramientas formales, pero con una perspectiva aplicada.

Primer parcial

- Progresión 1 — **Sucesión de números reales**
  - Explorando los números reales
  - Comportamientos de una sucesión
- Progresión 2 — **Límites, propiedades, teoremas y sus aplicaciones**
  - Concepto de límite
  - Propiedades y teoremas de los límites
  - Límites trigonométricos
  - Límites indeterminados
  - Interpretación de los límites en contextos reales
- Progresión 3 — **Modelos matemáticos de fenómenos**
  - Modelos continuos y discontinuos
  - Modelos matemáticos de fenómenos naturales
  - Modelos matemáticos de fenómenos sociales

Progresión 1

Sucesión de números reales

APERTURA

Las sucesiones de números reales son listas ordenadas de números que siguen un patrón específico. Estudiamos tres tipos principales según su comportamiento: las convergentes, se acercan cada vez más a un valor fijo como la sucesión 1, 1/2, 1/3, 1/4... que se aproxima a cero; las divergentes, crecen o decrecen sin límite como 2, 4, 6, 8... que aumenta indefinidamente; y las oscilantes, alternan entre valores como 1, -1, 1, -1... que cambia de signo continuamente.

Estos conceptos son fundamentales porque nos permiten modelar situaciones reales como el crecimiento poblacional, la desvalorización de activos o los ciclos naturales. Además, las sucesiones constituyen la base para entender ideas más avanzadas en matemáticas, tal como las series infinitas y los límites de funciones; herramientas esenciales en campos tipo la física, la economía y la ingeniería.

Al comprender cómo se comportan las sucesiones, desarrollamos la capacidad de analizar procesos que evolucionan paso a paso, predecir tendencias a largo plazo y resolver problemas mediante aproximaciones sucesivas. Este conocimiento no solo es crucial para estudios superiores en ciencias exactas, también fortalece nuestro pensamiento lógico y nuestra habilidad para interpretar fenómenos cambiantes en el mundo que nos rodea.

Actividad de APRENDIZAJE 1

Principio de la Nueva Escuela Mexicana

Ámbito

I. Clasifica cada número en el conjunto más pequeño al que pertenece ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$) en un diagrama de Venn:

a) -5

b) $\sqrt{16}$

c) $0.333\ldots$

d) π

e) $\frac{7}{3}$

f) $1+\sqrt{2}$

II. Ubica aproximadamente los siguientes números en la recta numérica dibujada:

a) $\frac{5}{2}$

b) $\sqrt{13}$

c) $1.\overline{3}$

d) π

e) -3.75

DESARROLLO

Explorando los números reales

Los números que usamos actualmente no surgieron todos al mismo tiempo.

A lo largo de la historia, cada nuevo tipo de número apareció para resolver una necesidad específica:

Conjunto	Símbolo	Ejemplos	Descripción
Naturales	$\mathbb{N}$	1, 2, 3, 4, 5...	Se utilizan para contar objetos.
Enteros	$\mathbb{Z}$	..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...	Incorporan los números negativos y el cero.
Racionales	$\mathbb{Q}$	½, -¾, 0.25, 1.5...	Son los números que pueden expresarse como fracción de enteros.

Conjunto	Símbolo	Ejemplos	Descripción
Irracionales	$\mathbb{I}$	$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e$...	No pueden expresarse como fracción; su representación decimal es infinita y no periódica.
Reales	$\mathbb{R}$	Todos los anteriores	Reúnen a los racionales e irracionales en una misma recta continua.

El sistema de números reales se estructura mediante la siguiente secuencia de inclusiones:

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$

Y

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$$

Cada número real puede ubicarse en un punto de la recta real, y cada punto de la recta representa un número real. Por tanto, cada número real ocupa una posición única en la recta numérica.

Así, no existen espacios vacíos entre los números: entre dos números cualesquiera, siempre hay otro número real.

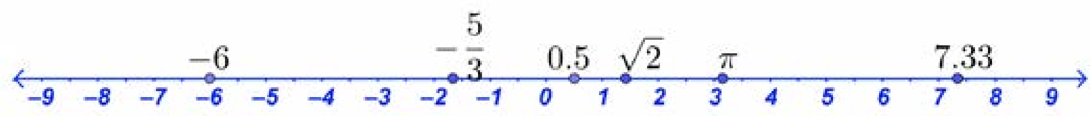


Ilustración 1. Ubicación de números reales en la recta numérica

Todo número real puede escribirse en forma **decimal**, pero no todos los decimales se comportan igual.

Tipo de número	Ejemplo	Tipo de expresión decimal	Conjunto
Decimal finito	0.25 = ¼	Termina después de algunos dígitos.	Racional
Decimal infinito periódico	⅓ ≈0.333...	Tiene un grupo de dígitos que se repite infinitamente.	Racional
Decimal infinito no periódico	$\sqrt{2}\approx1.41421356...$	No termina ni se repite.	Irracional

¿Existen huecos en la recta real?

Consideremos el siguiente conjunto de números racionales:

$$A=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2<2\}$$

Es decir, todos los números racionales cuyo cuadrado es menor que 2.

¿Qué pasa en los números racionales ($\mathbb{Q}$)?

- A está acotado superiormente: Sabemos que ningún elemento de A puede ser mayor que 1.5 (pues $1.5^2 = 2.25 > 2$).
- No existe máximo en A: Para cualquier racional en A, siempre puedo encontrar otro más grande que todavía cumpla $x^2 < 2$.
- No existe supremo en $\mathbb{Q}$: ¡No hay un número racional que sea la "menor cota superior"!

En $\mathbb{Q}$ hay un hueco donde debería estar $\sqrt{2}$.
¿Y en los números reales ($\mathbb{R}$)?

$$\sup(A) = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

El supremo si existe, es un número real pues la raíz cuadrada de dos es un número irracional.

Axioma de completitud: *Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene supremo en* $\mathbb{R}$.

Esta es la propiedad que elimina los huecos en la recta real.

Densidad de los números reales
Teorema 1:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \mid a < c < b$$

"Para todo a, b que pertenecen al conjunto de números reales, si a es menor que b, entonces existe c perteneciente a los reales, tal que a es menor que c y c es menor que b."

En palabras simples: entre dos números reales distintos, siempre hay otro número real.

Ejemplo: Entre 1.4 y 1.5 está 1.45, y entre 1.4 y 1.45 está 1.425, y así infinitamente.

Teorema 2:

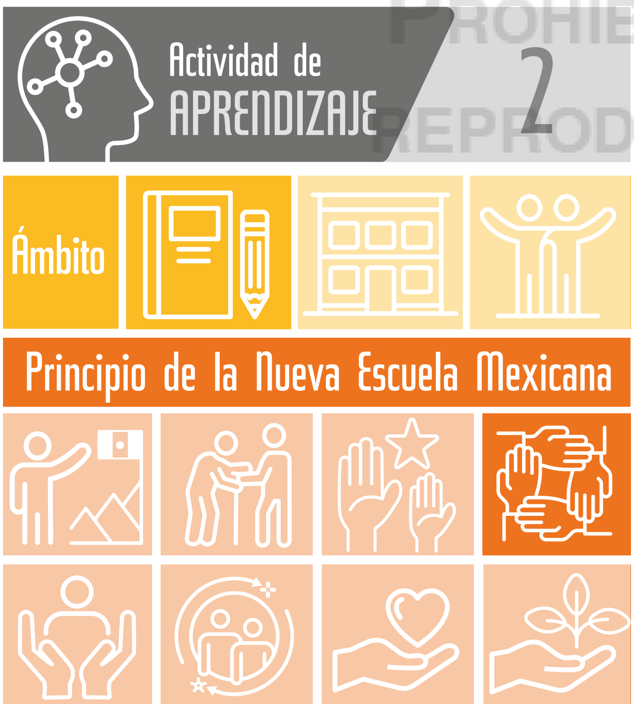
Entre dos números reales distintos existen infinitos números:
- Racionales ($\mathbb{Q}$)
- Irracionales ($\mathbb{I}$)

Ejemplo: Entre 1.4 y 1.5 hay infinitos racionales como:

$$1.41, 1.42, 1.43, \ldots, \frac{99}{70} \approx 1.4142857, \ldots$$

Y, también infinitos irracionales como:

$$1.4142135\ldots, \sqrt{2}, 1.4142168\ldots, \ldots$$



I. Completa la siguiente tabla.

Número	Expresión Decimal	Tipo de Decimal	Conjunto
$\frac{3}{8}$	0.375	Finito	$\mathbb{Q}$
$\frac{2}{11}$			
$\sqrt{5}$			
$0.1\overline{6}$			
$\frac{9}{4}$			

II. Dado el conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3\}$, responde:

a) ¿Está B acotado superiormente?

b) ¿Existe máximo en B?

c) ¿Existe supremo en $\mathbb{Q}$?

d) ¿Existe supremo en $\mathbb{R}$?

e) ¿Cuál es el supremo en $\mathbb{R}$?

III. Para cada par de números, encuentra un número racional e irracional entre ellos

a) 1.7 y 1.8

b) -0.3 y -0.2

c) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$

Comportamientos de una sucesión

Hemos visto que los números reales forman un conjunto continuo, sin huecos entre ellos. Ahora estudiaremos cómo seleccionar ciertos números reales de forma ordenada para formar una sucesión.

Si los números reales son continuos, ¿cómo podemos elegir algunos de ellos para formar una lista ordenada?

Definición: Una **sucesión** es una lista ordenada e infinita de números reales:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

Una sucesión es una función f que asigna a cada número natural n un número real a_n:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Por tanto:

- La sucesión completa se denota: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ o simplemente (a_n)
- a_n: término n-ésimo o término general
- n: índice (siempre número natural)

Ejemplos:

Sucesión	Expresión	Términos
Sucesión de números pares	$a_n = 2n$	$2,4,6,8,10,12,\dots$
Sucesión alternante	$a_n = (-1)^n$	$-1,1,-1,1,-1,1,\dots$
Sucesión que se acerca a cero	$a_n = \frac{1}{n}$	$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots$
Sucesión constante	$a_n = 5$	$5,5,5,5,5,\dots$

Las sucesiones numéricas nos permiten explorar patrones infinitos y comprender cómo se comportan los términos a medida que avanzamos indefinidamente. Imagina que cada sucesión es un viaje numérico: algunos viajes nos llevan hacia un destino específico, otros se alejan sin límite, y algunos oscilan entre diferentes valores.

Sucesiones convergentes

Una sucesión **converge** cuando sus términos se acercan cada vez más a un número fijo L, llamado **límite**, en medida que n crece.

Ejemplo 1:

Observa la siguiente sucesión.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

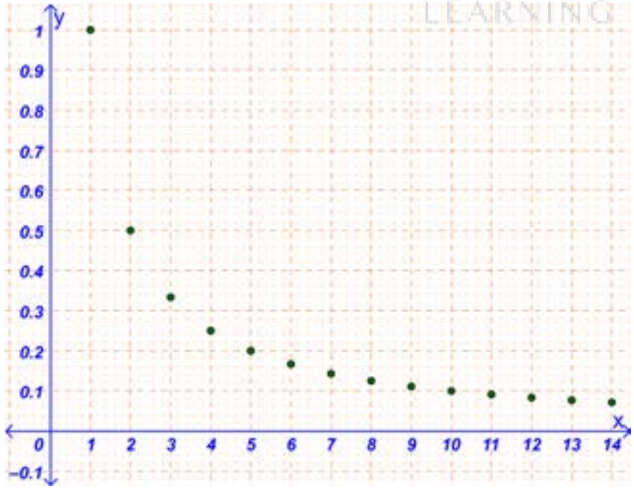
Encontraremos los primeros cinco términos mediante una tabla.

n	$a_n = \frac{1}{n}$
1	$a_1 = \frac{1}{1} = 1$
2	$a_2 = \frac{1}{2}$
3	$a_3 = \frac{1}{3}$
4	$a_4 = \frac{1}{4}$
5	$a_5 = \frac{1}{5}$

Esta sucesión a medida que crece tiene elementos cada vez más pequeños. Esto representaría el siguiente comportamiento convergente:

- Cuando n=10: $a_{10} = 0.1$
- Cuando n=100: $a_{100} = 0.01$
- Cuando n=1000: $a_{1000} = 0.001$

Por tanto, cuando la sucesión tienda al infinito convergerá en cero.



Gráfica 1. Sucesión convergente en cero

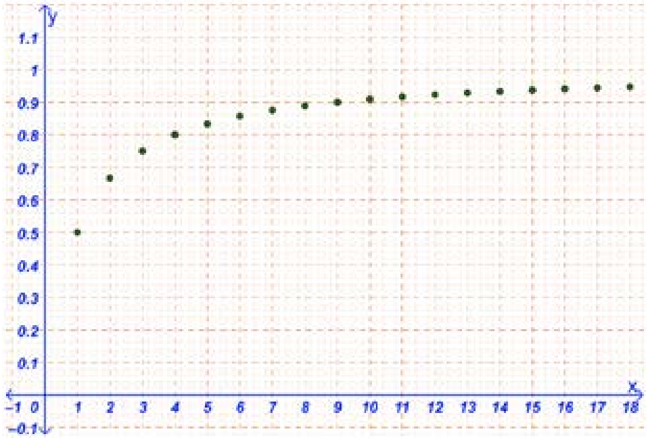
Ejemplo 2:

Analicemos la siguiente sucesión:

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

Obtendremos los valores de los puntos para graficarlos posteriormente.

n	$a_n = \frac{n}{n+1}$
1	$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0.5$
2	$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$
3	$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} = 0.75$
4	$a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} = 0.8$
5	$a_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6} \approx 0.8333$
6	$a_6 = \frac{6}{6+1} = \frac{6}{7} \approx 0.8571$
7	$a_7 = \frac{7}{7+1} = \frac{7}{8} = 0.875$
8	$a_8 = \frac{8}{8+1} = \frac{8}{9} \approx 0.8889$
9	$a_9 = \frac{9}{9+1} = \frac{9}{10} = 0.9$
10	$a_{10} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11} \approx 0.9091$



Gráfica 2. La sucesión converge a uno

Los términos se acercan cada vez más a 1, pero nunca lo alcanzan.

Sucesiones divergentes

Una sucesión **diverge** cuando sus términos crecen (o decrecen) sin límite a medida que n aumenta.

Ejemplo 1:
Analicemos un crecimiento lineal dado por la sucesión:

$$a_n = 2n + 1$$

Obtengamos los valores de la sucesión:

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{a_n = 2n + 1}$
1	$a_1 = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$
2	$a_2 = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$
3	$a_3 = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7$
4	$a_4 = 2(4) + 1 = 8 + 1 = 9$
5	$a_5 = 2(5) + 1 = 10 + 1 = 11$
6	$a_6 = 2(6) + 1 = 12 + 1 = 13$
7	$a_7 = 2(7) + 1 = 14 + 1 = 15$
8	$a_8 = 2(8) + 1 = 16 + 1 = 17$
9	$a_9 = 2(9) + 1 = 18 + 1 = 19$
10	$a_{10} = 2(10) + 1 = 20 + 1 = 21$

Por consiguiente, si graficamos los elementos de la sucesión, tenemos:

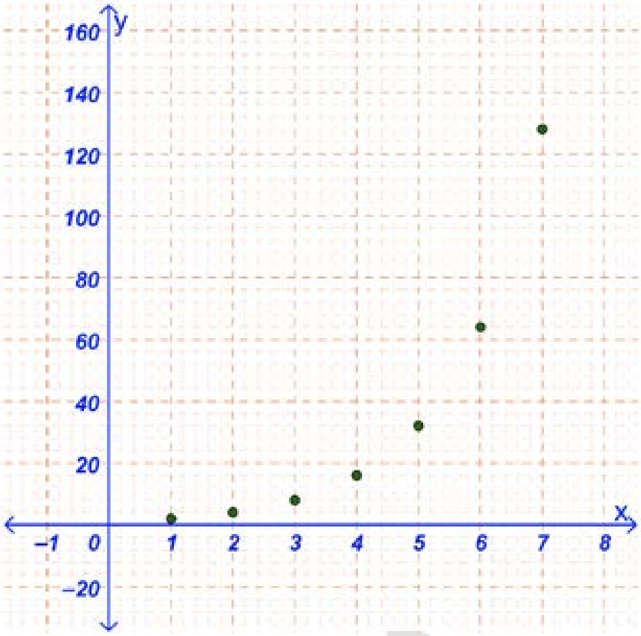
Gráfica 3. Sucesión con crecimiento lineal

No existe ningún número L que pueda contener esta sucesión y los términos superan cualquier valor que imaginemos.

Ejemplo 2:

$$a_n = 2^n$$

Los términos de la sucesión anterior serían: 2,4,8,16,32,64,...



Gráfica 4. Crecimiento exponencial

El crecimiento es mucho más rápido que el lineal.

Sucesiones oscilantes

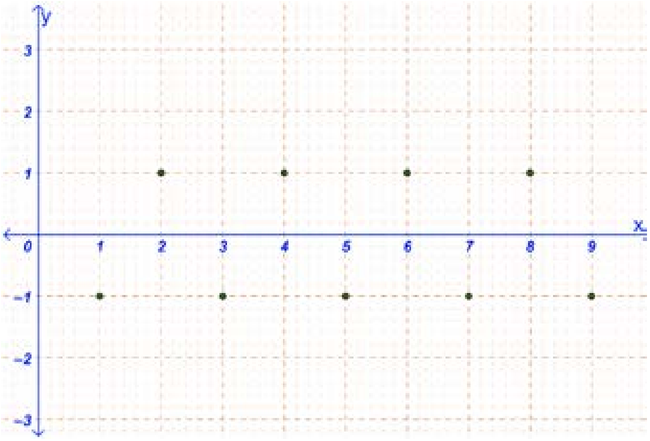
Una sucesión oscila cuando sus términos alternan entre diferentes valores sin estabilizarse en uno solo.

Ejemplo 1:

Analicemos la siguiente sucesión:

$$a_n = (-1)^n$$

Podemos observar que sólo contará con dos valores: −1 y 1, dependiendo del grado del exponente, si es par, tendremos valores positivos; si es impar, nos dará valores negativos. De este modo la sucesión continúa infinitamente intercalando los resultados.



Gráfica 5. Sucesión oscilante entre -1 y 1

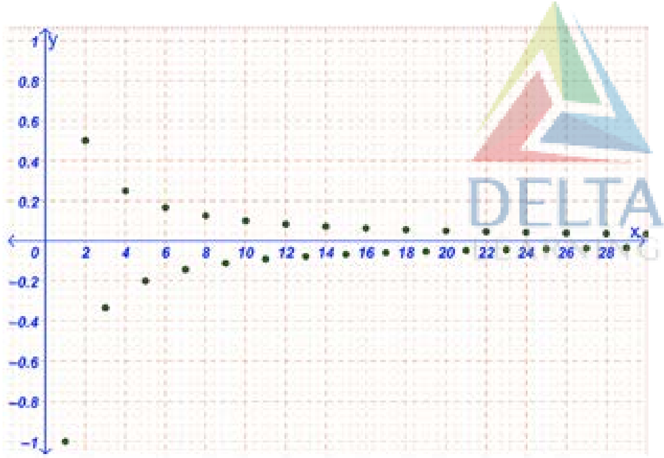
Ejemplo 2:

La siguiente sucesión representa una oscilación amortiguada:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Creamos su tabla de valores:

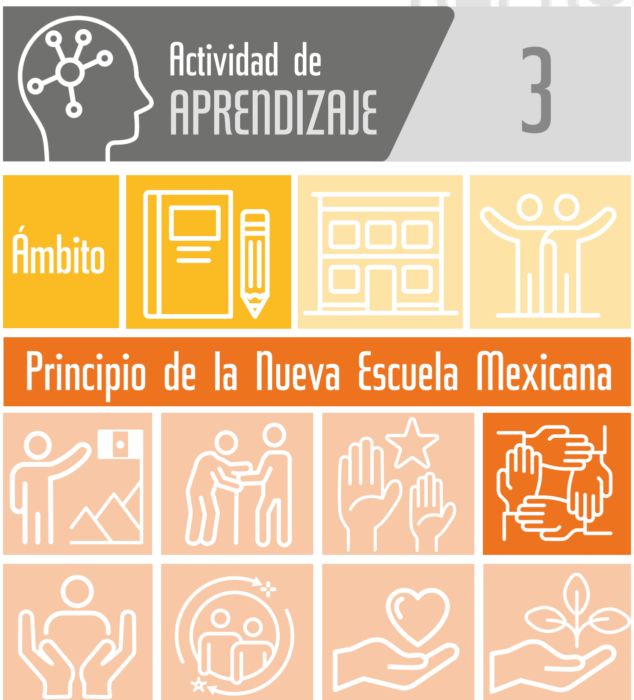
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{a_n = \frac{(-1)^n}{n}}$
1	$a_1 = \frac{(-1)^1}{1} = \frac{-1}{1} = -1$
2	$a_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$
3	$a_3 = \frac{(-1)^3}{3} = \frac{-1}{3} \approx -0.3333$
4	$a_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$
5	$a_5 = \frac{(-1)^5}{5} = \frac{-1}{5} = -0.2$
6	$a_6 = \frac{(-1)^6}{6} = \frac{1}{6} \approx 0.1667$
7	$a_7 = \frac{(-1)^7}{7} = \frac{-1}{7} \approx -0.1429$
8	$a_8 = \frac{(-1)^8}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$
9	$a_9 = \frac{(-1)^9}{9} = \frac{-1}{9} \approx -0.1111$
10	$a_{10} = \frac{(-1)^{10}}{10} = \frac{1}{10} = 0.1$



Gráfica 6.

La sucesión presenta las siguientes características:

- Alterna entre valores positivos y negativos
- $a_n > 0$ cuando n es par
- $a_n < 0$ cuando n es impar
- El valor absoluto disminuye con n



I. Para cada una de las siguientes sucesiones calcula los primeros 10 términos mediante una tabla, grafica los pares ordenados obtenidos y clasifica el comportamiento (convergente, divergente u oscilante). Describe el patrón que observas en cada caso:

a) $a_n = 3 - \frac{1}{n}$

b) $a_n = n^2$

c) $a_n = (-1)^{n+1}$

d) $a_n = \frac{2n+1}{n}$

e) $a_n = 4n - 2$

f) $a_n = \frac{5n+3}{n}$

g) $a_n = 2 + (-1)^n$

h) $a_n = 0.5 \cdot 2^n$

i) $a_n = \frac{4}{n+1}$

j) $a_n = 3n - (-1)^n$

Actividad
TRANSVERSAL

El número áureo en la naturaleza[1]

El número de oro y sus derivados son la clave de la belleza y la singularidad del mundo que nos rodea. Está presente en las flores, en los animales y en los humanos. La belleza y singularidad de la naturaleza es cosa de números.

El mundo que nos rodea está repleto de piezas y elementos muy bellos, y singulares. El más simple ejemplo de ello pueden ser las flores, las cuales han sido amadas durante siglos por los seres humanos. Pero, hay mucho más: animales, edificios, frutos o incluso personas. En todas ellas encontramos una belleza y una singularidad que les hace resultar atractivos.

¿Por qué ocurre esto? ¿Qué tiene la naturaleza para resultar tan bella y "perfecta"? La razón se esconde tras tres simples teorías matemáticas enlazadas entre sí: la sucesión de Fibonacci, el segmento áureo y el número de oro –también llamado número φ–.

¿Qué son estos tres conceptos y cómo están relacionados entre sí?

Sucesión de Fibonacci. Partiendo desde el número uno, la sucesión de Fibonacci consiste en ir sumando el resultado de la última operación con su mayor sumando. Es decir: 0+1 = 1, 1+1 = 2, 1+2 = 3, 2+3 = 5, 3+5 = 8, y así sucesivamente.

El segmento áureo. Es un segmento dividido en dos partes de forma que se cumple la igualdad $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, donde $(a + b)$ es el total del segmento, a la parte más grande y b la parte de menor tamaño.

Número de oro. Conocido desde hace siglos, el número de oro –también llamado número φ o número áureo– está asociado a la belleza y a la naturaleza. Se representa con la letra griega "phi" (φ), se pronuncia "fi" y su valor es 1.61803398874989… Se trata de un número irracional, pues cuenta con infinitos números decimales no periódicos.

Una vez que has desarrollado la lectura anterior deberás encontrar la proporción áurea en diferentes cosas de tu entorno, podrás iniciar con las longitudes de algunas extremidades de tu cuerpo, toma diferentes medidas y encuentra el promedio de cada una de tus mediciones, por ejemplo, mide la longitud de tu primer y segunda falange de tus manos y posteriormente divide la longitud mayor entre la menor, registra tus resultados en tu tabla y efectúa la misma medición con diferentes compañeros, al final verifica tu resultado y compáralo con la proporción áurea, escribe tus observaciones y comentarios para que posteriormente lo compartas con tu clase. Puedes probar con otras proporciones en tu cuerpo, con plantas o animales, al final realiza una plenaria con tu clase para compartir tus hallazgos.

1 Recuperado el 01 de noviembre de 2025 de: [https://www.esfacilserverde.com/portal25/crecimiento-de-consciencia/265-la-belleza-y-singularidad-de-la-naturaleza-es-cosa-de-numeros]. Texto adaptado con fines didácticos.

Actividad SOCIOEMOCIONAL

Las metas también cambian

Una meta no siempre está hecha para ser alcanzada, muchas veces sirve como algo a lo que hay que apuntar.
Bruce Lee.

Actividad 1: metas y trayectorias

a. Lee y analiza la situación:

Francisco desea estudiar medicina forense. Sin embargo, una mudanza familiar le obliga a considerar otras opciones. Él visualiza su meta como una sucesión convergente: un camino claro y directo hacia un objetivo fijo. Pero la vida, como una sucesión oscilante, a veces nos presenta cambios inesperados.

b. Responde desde las matemáticas y las emociones:

- ¿Cómo relacionas la situación de Francisco con una sucesión que cambia su comportamiento?
- ¿Qué tipo de sucesión representa una meta que se adapta sin perder su dirección?
- ¿Puede una meta modificarse y aun así "converger" hacia un futuro satisfactorio?

c. Ejercicio de replanteamiento:

- Define la meta inicial de Francisco como una sucesión:

M_n = "estudiar medicina forense en la universidad X"

- Ahora, redefine la sucesión con una modificación:

M'_n = "estudiar medicina general y después especializarse en forense"

Compara ambas "sucesiones-metas". ¿Ambas pueden llevar a un mismo límite?

Actividad 2: tu sucesión de vida

a. Define tu meta posbachillerato como una sucesión:

Ejemplo:
Si tu meta es "selr ingeniero", define:

$$A_n = \text{pasos para ser ingeniero en el año } n$$

A_1= terminar el bachillerato, A_2= entrar a la universidad, A_3= titularse, ...

b. Identifica posibles "perturbaciones" (cambios):

- ¿Qué harías si no pasas a la universidad en A_2?
- ¿Cómo replantearías tu sucesión si surge una nueva oportunidad laboral o educativa?

c. Grafica tu sucesión-metas:
Dibuja en tu cuaderno una recta numérica o un plano con puntos que representen los pasos hacia tu meta. Incluye posibles "ramificaciones" o "sucesiones alternativas".

d. Reflexión grupal:
- ¿Todas las trayectorias llevan al mismo lugar?
- ¿Cómo saber si vamos por buen camino, incluso cuando no hemos llegado?

Reafirmo y ordeno
Distingue que el cambio puede hacerse presente en cualquier momento de tu vida, por lo que tus metas deben de ser flexibles y transformarse para responder adecuadamente a las nuevas circunstancias. Sin embargo, también es importante que identifiques lo que permanece en ti: tus aspiraciones y motivaciones, ya que para adaptarse a los cambios se requiere mantener vivo lo que se desea.

Para tu vida diaria
Pregunta a tus familiares y amistades si alguna ocasión tuvieron que ajustar sus metas debido a un cambio en sus vidas. Escúchalos y aprende de sus experiencias.

¿Quieres saber más?
Observa el video *Por los sueños se suspira, por las metas se trabaja*, en el cual Humberto Ramos cuenta su experiencia sobre cómo tuvo que modificar algunas de sus metas para convertirse en el dibujante de *El Hombre Araña*. Lo puedes ver en https://www.youtube.com/watch?v=6NTM8gVauYo

Concepto clave
Resistencia al cambio.
Obstinación negativa por permanecer firme a una idea o creencia, aun cuando las condiciones no la favorecen.

Progresión
2

Límites, propiedades, teoremas y sus aplicaciones

APERTURA

Imagina que estás conduciendo por una carretera. Tu mirada se desplaza hacia el velocímetro. La aguja marca 85 km/h. Pero ¿qué significa realmente ese número? No significa que hayas recorrido 85 kilómetros en la última hora —quizás solo llevas 10 minutos en ruta—. Tampoco significa que vayas a recorrer 85 kilómetros en la próxima. Ese 85 km/h es un fantasma, una medida de algo que está ocurriendo en un instante infinitamente pequeño. Es la respuesta a una pregunta aparentemente imposible: ¿A qué velocidad me estoy moviendo justo ahora?

Los primeros científicos que se enfrentaron a este problema, como Galileo o Newton, se dieron cuenta de que, para capturar esta velocidad instantánea, no podían conformarse con medir distancias en intervalos de tiempo largos. Si medimos la distancia recorrida en un segundo, aún estamos promediando. Si la medimos en una décima de segundo, el promedio es más preciso, pero sigue siendo un promedio. La verdadera respuesta surgió de una idea revolucionaria: ¿y si hacemos que ese intervalo de tiempo se encoja hasta desaparecer? No un segundo, ni una milésima, sino un intervalo que se aproxima a cero. Al calcular la velocidad en este intervalo **infinitesimal**, nos enfrentamos a una división por algo que casi es cero: una paradoja. La herramienta matemática que resuelve esta paradoja, que nos permite dar sentido a lo que ocurre en ese instante efímero, es el **límite**. El límite es el andamiaje lógico que nos permite preguntar: ¿hacia qué valor se acerca la velocidad promedio cuando el tiempo disponible para medirla se vuelve infinitamente pequeño? La velocidad instantánea es, en esencia, un límite.

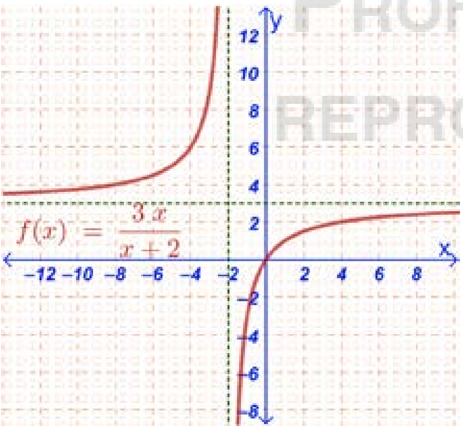
Ahora, lleva tu mirada más allá del parabrisas. Piensa en un economista que analiza el crecimiento de una inversión en la bolsa de valores. Los datos del pasado forman una línea serpenteante, llena de picos y valles. Su desafío no es medir un instante, sino discernir un patrón a largo plazo. ¿Se está estabilizando la inversión en un valor determinado? ¿Está creciendo sin freno? ¿O está colapsando?

Para responder esto, el economista debe proyectar la tendencia hacia el futuro. Se pregunta: si las condiciones actuales se mantuvieran de forma indefinida, eliminando las fluctuaciones diarias aleatorias, ¿hacia qué valor se encaminaría el precio de esta acción? Una vez más, la pregunta clave es: ¿hacia qué se acerca el valor cuando el tiempo avanza hacia el infinito? Esta predicción del comportamiento final, esta visión del destino de la función es también un límite.

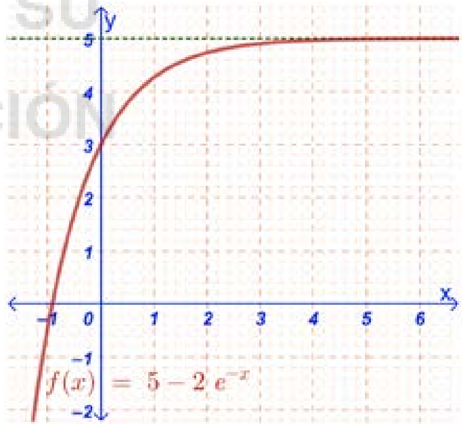
Así, el concepto de límite se construye como un puente conceptual de doble vía. Por un lado, nos permite acercarnos infinitamente a un punto para capturar el comportamiento de un fenómeno en un instante de tiempo, congelando el cambio para estudiarlo. Por el otro, nos permite alejarnos infinitamente para predecir su comportamiento global y su tendencia a largo plazo.

I.Observa cada una de las siguientes gráficas y explica por qué razón los valores de la gráfica no exceden los valores acotados por la línea punteada. Con base a la función dada, sustituye valores cada vez más cercanos a esas líneas y compara tus resultados.

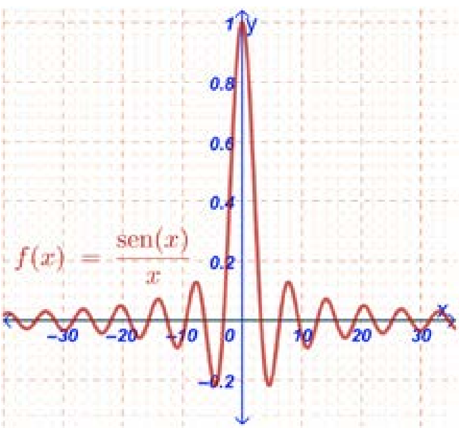
a.



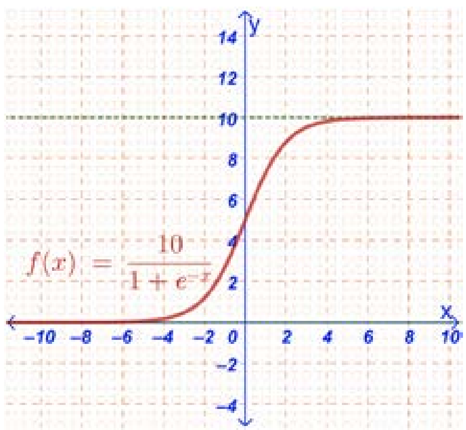
b.



c.



d.



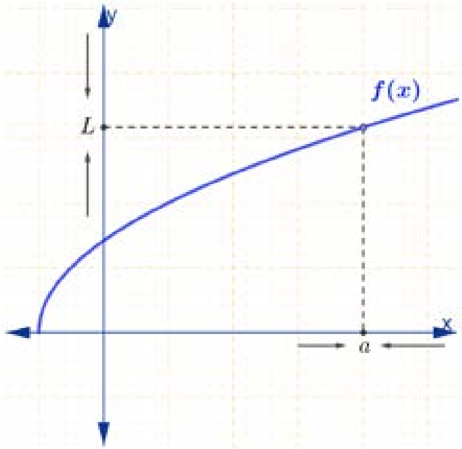
DESARROLLO

Concepto de límite

Un límite, no nos dice el valor de una función en un punto, sino hacia qué valor se acerca a medida que nos aproximamos a ese punto, tanto por la izquierda como la derecha. De manera formal, decimos que el límite de *f(x)* cuando x tiende a a es L, y lo escribimos como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Entonces, sí podemos hacer que los valores de *f(x)* se acerquen arbitrariamente a L (tan cerca como queramos), tomando x lo suficientemente cerca de a, pero sin ser igual a a.



Gráfica 7. A medida que x se acerca a a, f(x) se acerca a L. El valor en x=a puede ser diferente o incluso no existir

Propiedades y teoremas de los límites

Supongamos que c es una constante y que los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen. Entonces, las siguientes propiedades se cumplen:

Teoremas para el cálculo de límites

1. Límite de una constante:

$$\lim_{x \to a} c = c$$

2. Límite de una suma o diferencia:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

3. Límite de un producto:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

4. Límite de un cociente:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \text{ siempre que } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

5. Límite de una potencia:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

donde n es un número entero positivo.

6. Límite de una raíz:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

(Si n es par, suponemos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$).

Estas propiedades son nuestra **caja de herramientas matemáticas**. Nos permiten descomponer límites complejos en otros más simples que sí podemos calcular.

Ejemplo 1:

Calcula $\lim_{x \to 2} (3x^2 + 2x - 1)$

Aplicamos las propiedades de suma, producto y potencia:

$$\lim_{x\to 2}(3x^2+2x-1)=3\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2+2\left(\lim_{x\to 2}x\right)-\lim_{x\to 2}1=3(2)^2+2(2)-1=12+4-1=15$$

Ejemplo 2:

Calcula $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-1}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-1}=\frac{\lim_{x\to 3}(x^2-4x+3)}{\lim_{x\to 3}(2x-1)}=\frac{\lim_{x\to 3}x^2-4\cdot\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}3}{2\cdot\lim_{x\to 3}x-\lim_{x\to 3}1}$$

$$=\frac{(3)^2-4(3)+3}{2(3)-1}=\frac{9-12+3}{6-1}=\frac{0}{5}=0$$

Ejemplo 3:

Calcula $\lim_{x\to 4}\sqrt{2x+1}$

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{2x+1}=\sqrt{\lim_{x\to 4}(2x+1)}=\sqrt{2\cdot\lim_{x\to 4}x+\lim_{x\to 4}1}=\sqrt{2(4)+1}=\sqrt{8+1}=\sqrt{9}=3$$

Ejemplo 4:

Calcula $\lim_{x\to -1}(x^3-2x)(x^2+5)$

$$\lim_{x\to -1}(x^3-2x)(x^2+5)=\left[\lim_{x\to -1}(x^3-2x)\right]\left[\lim_{x\to -1}(x^2+5)\right]$$

$$=\left[\lim_{x\to -1}x^3-2\cdot\lim_{x\to -1}x\right]\left[\lim_{x\to -1}x^2+\lim_{x\to -1}5\right]$$

$$=[(-1)^3-2(-1)][(-1)^2+5]=[-1+2][1+5]=(1)(6)=6$$

Ejemplo 5:

Calcula $\lim_{x\to 0}(2x^4-3x^3+x-7)$

$$\lim_{x\to 0}(2x^4-3x^3+x-7)=2\cdot\lim_{x\to 0}x^4-3\cdot\lim_{x\to 0}x^3+\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}7$$

$$=2(0)^4-3(0)^3+(0)-7=0-0+0-7=-7$$

Ejemplo 6:

Calcula $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x}{\sqrt{x+2}}$

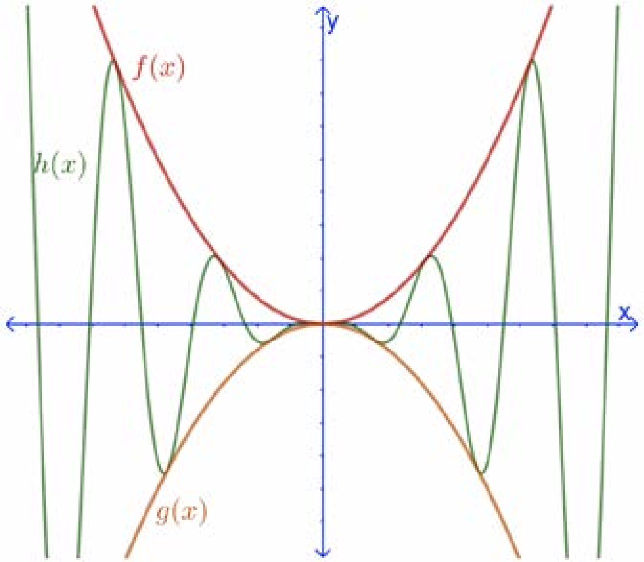
$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x}{\sqrt{x+2}}=\frac{\lim_{x\to 2}(3x^2-2x)}{\lim_{x\to 2}\sqrt{x+2}}=\frac{\lim_{x\to 2}(3x^2-2x)}{\sqrt{\lim_{x\to 2}(x+2)}}$$

$$=\frac{3\cdot\lim_{x\to 2}x^2-2\cdot\lim_{x\to 2}x}{\sqrt{\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2}}=\frac{3(2)^2-2(2)}{\sqrt{2+2}}$$

$$=\frac{3(4)-4}{\sqrt{4}}=\frac{12-4}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Teorema de estricción, del emparedado o el sándwich

A veces, una función puede ser difícil de evaluar directamente, pero podemos "apretarla" entre dos funciones más simples cuyo comportamiento conocemos.



Gráfica 8. Si *h(x)* está atrapada entre *f(x)* y *g(x)*, y ambas funciones laterales tienden a L, entonces *h(x)* no tiene más remedio que tender a L.

Si *f(x)≤h(x)≤g(x)* para todo x en un intervalo abierto que contiene a a (excepto posiblemente en a), y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$$

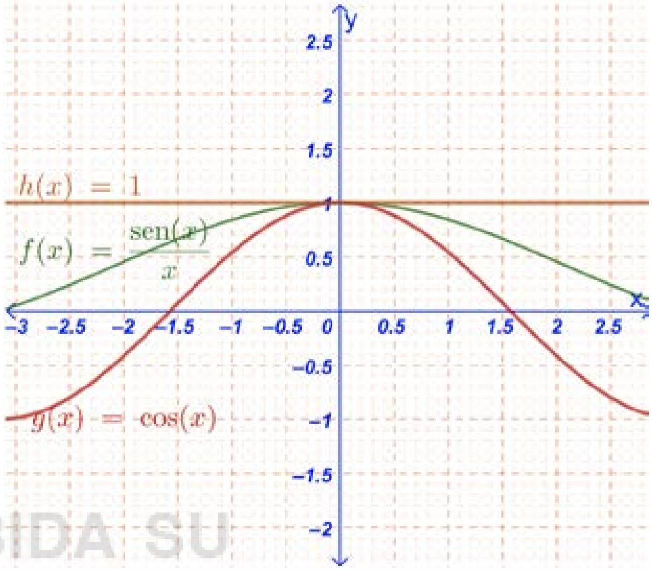
Entonces, se cumple que:

$$\lim_{x\to a} h(x) = L$$

Este teorema es crucial para demostrar uno de los límites más importantes del cálculo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\ x}{x} = 1$$

Al demostrarlo, se empareda a $\frac{\sin x}{x}$ entre $\cos\ x$ y 1.



Gráfica 9. Dado que ambos límites laterales son 1, el límite de la función central debe ser también 1.

Actividad de APRENDIZAJE 5

I. Utiliza los teoremas para el cálculo de límites y encuentra los valores, a los cuales, tienden cada una de las funciones en las abscisas indicadas, con ayuda de GeoGebra traza las gráficas de las funciones señalando gráficamente el límite calculado.

a. $\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x - 3)$

b. $\lim_{x\to -2}(4x^2 + 3x - 7)$

c. $\lim_{x\to 0}(5x^4 - 2x^2 + 8)$

d. $\lim_{x\to 3}(2x^3 - 5x + 1)$

e. $\lim_{x\to -1}(x^4 + x^3 - 2x + 4)$

f. $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 7)$

g. $\lim_{x\to 0}(x^4 - 3x^3 + 2x - 6)$

h. $\lim_{x\to -4}(3x^3 + 2x^2 - x + 5)$

i. $\lim_{x\to 2}(x^5-4x^2+3)$

j. $\lim_{x\to -1}(6x^2+2x-8)$

k. $\lim_{x\to 2}[(x^2-4)(3x+1)]$

l. $\lim_{x\to -1}[(2x+3)(x^2-5x)]$

m. $\lim_{x\to 0}[(x^3+2x)(4x-1)]$

n. $\lim_{x\to 4}[(6-x)(x^2+2)]$

o. $\lim_{x\to 1}[(3x^2-1)(2x+5)]$

p. $\lim_{x\to 3}[(x^2-9)(2x-1)]$

q. $\lim_{x\to -2}[(x+2)(x^3-4)]$

r. $\lim_{x\to 0}[(x^2+3)(4x-7)]$

s. $\lim_{x\to 1}[(3x-2)(x^2+x+1)]$

t. $\lim_{x\to 4}[(x-4)(2x^2+5)]$

u. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-1}$

v. $\lim_{x\to -3}\frac{2x^2-5x-3}{x+4}$

w. $\lim_{z\to 2}\frac{3z^2-2z+1}{z-3}$

x. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x+8}{x^2+1}$

y. $\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-1}{2x+3}$

z. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x+4}{x+2}$

Límites trigonométricos

El límite de una función trigonométrica se obtiene utilizando los siguientes teoremas en los que realizaremos un cambio de variable de la siguiente forma $u=f(x)$.

1. $\lim_{u\to\theta}\operatorname{sen}u=\operatorname{sen}\theta$
2. $\lim_{u\to\theta}\cos u=\cos\theta$
3. $\lim_{u\to 0}\operatorname{sen}u=0$
4. $\lim_{u\to 0}\cos u=1$
5. $\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}u}{u}=1$
6. $\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{u}=0$

Es importante señalar que para aplicar estos teoremas se debe verificar que las funciones trigonométricas no sean seno o coseno; deberán ser sustituidas por las identidades trigonométricas correspondientes, a continuación, se citan algunas de ellas.

$$\csc u=\frac{1}{\operatorname{sen}u}$$

$$\sec u=\frac{1}{\cos u}$$

$$\cot u=\frac{\cos u}{\operatorname{sen}u}$$

$$\tan u=\frac{\operatorname{sen}u}{\cos u}$$

$$\operatorname{sen}^2u+\cos^2u=1$$

Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{3x}$$

Al sustituir x=0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{3x}=\frac{\operatorname{sen}(0)}{0}=\frac{0}{0}$$

Como el límite está indeterminado aplicamos la identidad $\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}u}{u}=1$

Multiplicamos y dividimos por 5:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}$$

Hacemos cambio de variable $u=5x$

Cuando $x\to 0$, entonces $u\to 0$:

$$=\frac{5}{3}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}u}{u}=\frac{5}{3}\cdot 1=\frac{5}{3}$$