Serie Tlalmanalli

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

Josué Espinoza Rangel

Nueva Escuela Mexicana

DELTA LEARNING

Pensamiento Matemático III

Primera edición 2024
ISBN:
D.R. © 2019, Delta Learning®
Jose Ma. Morelos No.18, Col. Pilares, C.P. 52179, Metepec, Edo. de México.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro número: 4041
Contacto: 800 450 7676
Correo: contacto@deltalearning.com.mx

deltalearning.com.mx

Dirección editorial: Delta Learning

Editor en jefe: Zito Octavio Alejandre Rosas

Autor: Jo´sué Espinoza Rangel

Correctora: Karla Alejandra Garduño Juárez

Diseño: Sandra Ortiz y el equipo de Argonauta Comunicación

Portada: Elio Teutli Cortés

Imágenes: Adobe Stock

Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces provistos en este libro no pertenecen a Delta Learning®. Por tanto, no tenemos ningún control sobre la información que los sitios web están dando en un momento determinado y por consiguiente no garantizamos la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque esta información se compila con gran cuidado y se actualiza continuamente, no asumimos ninguna responsabilidad de que sea correcta, completa o actualizada.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan las opiniones de los mismos y, a menos que se indique específicamente, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material en cualquiera de los sitios incluidos en este libro no está autorizada, ya que el material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos están reservados a sus respectivos propietarios y Delta Learning® no se responsabiliza por nada de lo que se muestra en los enlaces provistos.

Impreso en México

Presentación

Bienvenidos al libro Pensamiento Matemático III. Esta obra constituye una herramienta esencial para estudiantes que desean fortalecer su razonamiento matemático y su habilidad para resolver problemas con eficacia. Alineado con las categorías y objetivos delineados en el programa de estudios del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior, el propósito principal de Pensamiento Matemático III es equipar a los estudiantes con las destrezas necesarias para aplicar conceptos matemáticos en contextos reales, abordando tanto el pensamiento aritmético, algebraico y geométrico como aspectos más avanzados del cálculo.

Este libro está organizado en tres secciones, cada una compuesta por cinco progresiones temáticas que exploran aspectos fundamentales del pensamiento matemático. Cada progresión se centra en aspectos específicos de este recurso sociocognitivo, lo que facilita una comprensión profunda y su aplicación práctica en diversos contextos.

Además de ofrecer una base teórica sólida, Pensamiento Matemático III presenta numerosos ejemplos prácticos que ayudan a los estudiantes a comprender y aplicar conceptos matemáticos de manera efectiva. También va más allá de la teoría al incluir una variedad de actividades complementarias que enriquecen el proceso de aprendizaje, promoviendo la aplicación transversal de conocimientos, el desarrollo de habilidades socioemocionales y la integración de la tecnología a través de actividades como realidad aumentada y códigos QR.

Este libro aboga por una metodología STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas), que fomenta la exploración de temas interdisciplinarios. Los estudiantes no solo adquieren conocimientos matemáticos, sino que también comprenden cómo estos se relacionan con otras disciplinas y aplicaciones en la vida real.

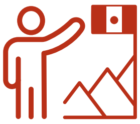
Pensamiento Matemático III se presenta como una herramienta completa y actualizada que permite a los estudiantes desarrollar habilidades esenciales de pensamiento matemático y aplicar conceptos en situaciones de la vida real. Con su enfoque en actividades complementarias, integración tecnológica y metodología STEAM, este libro proporciona a los estudiantes las herramientas necesarias para el éxito en el mundo matemático y más allá.

La nueva escuela mexicana

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) tiene como principio fundamental que la educación sea entendida para toda la vida bajo el concepto de aprender a aprender, con actualización continua, adaptación a los cambios y aprendizaje permanente con el compromiso de brindar calidad en la enseñanza.

En la Editorial Delta Learning tenemos como misión crear materiales educativos de calidad, que cumplan los fundamentos del modelo educativo vigente de la Educación Media Superior, adoptando a la NEM como un eje rector en el diseño de nuestros libros, con el objetivo de promover aprendizajes de excelencia, inclusivos, pluriculturales, colaborativos y equitativos durante la formación de los bachilleres.

Haciendo suyo el reto, la Editorial Delta Learning desarrolla los contenidos de cada uno de sus ejemplares con los siguientes Principios que fundamentan la NEM:



Fomento de la identidad con México. El amor a la Patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso con los valores plasmados en la Constitución Política.

Responsabilidad ciudadana. El aceptar los derechos y deberes personales y comunes, respetar los valores cívicos como la honestidad, el respeto, la justicia, la solidaridad, la reciprocidad, la lealtad, la libertad, la equidad y la gratitud.

Honestidad. Es un compromiso fundamental para cumplir con la responsabilidad social, lo que permite que la sociedad se desarrolle con base en la confianza y en el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.

Participación en la transformación de la sociedad. El sentido social de la educación implica construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superen la indiferencia y la apatía para lograr la transformación de la sociedad en conjunto.

Respeto de la dignidad humana. El desarrollo integral del individuo promueve el ejercicio pleno y responsable de sus capacidades, el respeto a la dignidad y derechos humanos de las personas es una manera de demostrarlo.

Promoción de la interculturalidad. La comprensión y el aprecio por la diversidad cultural y lingüística, por el diálogo e intercambio intercultural sobre una base de equidad y respeto mutuo.

Promoción de la cultura de paz. La construcción de un diálogo constructivo, solidario y en búsqueda de acuerdos, permiten una solución no violenta a los conflictos y la convivencia en un marco de respeto a las diferencias.

Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente. El desarrollo de una conciencia ambiental sólida que favorezca la protección y conservación del medio ambiente, propiciando el desarrollo sostenible y reduciendo los efectos del cambio climático.

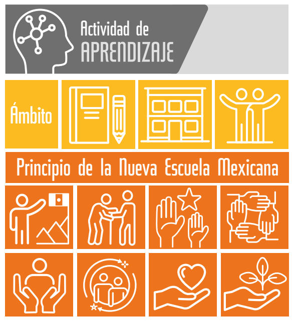
Estructura del libro

El presente libro se encuentra estructurado en 3 parciales en los cuales encontrarás desarrolladas las progresiones en apertura, desarrollo y cierre, asimismo cuenta con las siguientes secciones:

Evaluación diagnóstica: Esta se realiza al inicio del libro y tiene la finalidad de recuperar los conocimientos y habilidades necesarias para abordar los contenidos específicos de cada una de las progresiones de aprendizaje.

Actividades de aprendizaje: En las cuales pondrás a prueba los conocimientos y habilidades desarrollados en cada uno de los temas. Las actividades estarán vinculadas a los **ámbitos** del **Nuevo Modelo Educativo (NME)** de la **Escuela Media Superior (EMS), aula – escuela – comunidad,** así como a alguno de los principios de la **Nueva Escuela Mexicana (NEM)** por ser este un programa de estudios orientado a recuperar el sentido de pertenencia a los valores que te identifican con nuestro país.

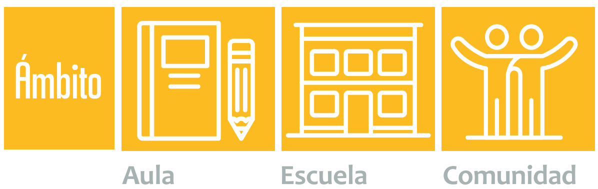
En cada actividad de aprendizaje encontrarás un tablero como el que se presenta a la derecha de este párrafo, en el cual podrás identificar a través de sus iconos específicos, tanto los **tres ámbitos del NME de la EMS**, como los **ocho principios de la NEM** a los que corresponda dicha actividad.



A continuación te mostramos las secciones de este tablero así como el significado de cada icono:

En la parte superior del tablero se encuentra una barra gris donde estará indicado el número de actividad.

A continuación verás una barra amarilla donde se indican los tres ámbitos (NME/EMS).



Por último, verás una sección de color naranja donde están indicados los principios de la NEM.

Fomento de la identidad con México

Responsabilidad ciudadana

Honestidad

Participación en la transformación de la sociedad

Respeto de la dignidad humana

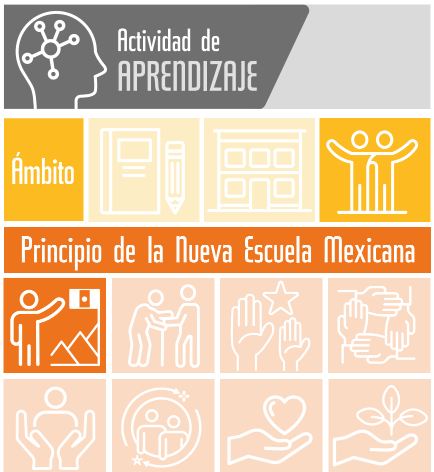
Promoción de la interculturalidad

Promoción de la cultura de paz

Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente

Para identificar el ámbito y principio correspondiente a cada actividad verás su respectivo icono en color amarillo y naranja y el resto de los iconos en un tono opaco.

En el ejemplo que ves a la derecha, el **ámbito** corresponde a la categoría **COMUNIDAD y el principio de la NEM corresponde al Fomento de la identidad con México.**



Actividades Transversales: Actividades orientadas a facilitar el proceso de vinculación de los conocimientos y habilidades de los recursos sociocognitivos con las distintas áreas de conocimiento.

Momento STEAM: Actividad donde convergen el conocimiento empírico, la ciencia, la tecnología, la ingeniería, el arte y las matemáticas.

Actividades QR interactivas: Actividades que asocian la tecnología con los conocimientos desarrollados en los temas, sólo se escanea el código QR y listo, se pueden reforzar los conocimientos y habilidades.

Realidad aumentada: Siempre es importante que todos los sentidos estén inmersos en el proceso de enseñanza – aprendizaje, las actividades de realidad aumenta dan una visión gráfica y vívida de los aprendizajes que se desean desarrollar en el libro.

Actividades Socioemocionales El curriculum ampliado no puede faltar dentro del contenido del texto, por ello, se incluyen actividades destinadas a desarrollar habilidades planteadas por los recursos socioemocionales del NME.

Adicionalmente podrás encontrar las siguientes secciones que te permitirán ampliar y afirmar los aprendizajes obtenidos en el curso.

Habilidad LECTORA

GLOSARIO

Evaluación DEL PARCIAL

BIBLIOGRAFÍA

Cuando visualices el siguiente ícono en alguna de las progresiones de aprendizaje, el código QR que aparezca junto a él tendrá una actividad perteneciente al Programa Aula Escuela Comunidad. Finalmente, te presentamos el ícono que señala el número de progresión al que pertence cada tema.

Proyecto Escolar Comunitario

Progresión 1

Progresiones

El libro se encuentra apegado al NME de la EMS y desarrolla cada una de las progresiones del programa de **Pensamiento matemático 3**.

1. Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.
2. Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.
3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.
4. Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.
5. Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.
6. Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación.
7. Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, “la derivada”, de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales.
8. Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos.
9. Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea.
10. Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica.
11. Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate.
12. Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales xpara describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmicas de base "a" sean funciones inversas entre sí.
13. Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas.
14. Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables.
15. Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo.

Índice

Evaluación DIAGNÓSTICA

1. Evalúa sin calculadora las siguientes expresiones:

a. $(-2)^5$

b. $\frac{3^{20}}{3^{17}}$

c. -4^3

d. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$

e. 7^{-2}

2. Desarrolla y simplifica las siguientes expresiones:

a. $3(x+6)+4(2x-5)$

b. $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$

c. $(x+3)^2$

d. $(2x+1)^3$

e. $(x+3)(4x-5)$

3. Factoriza los siguientes polinomios:

a. $9x^2-16$

b. x^4+27x

c. $2x^2+5x-12$

d. $x^3-3x^2-4x+12$

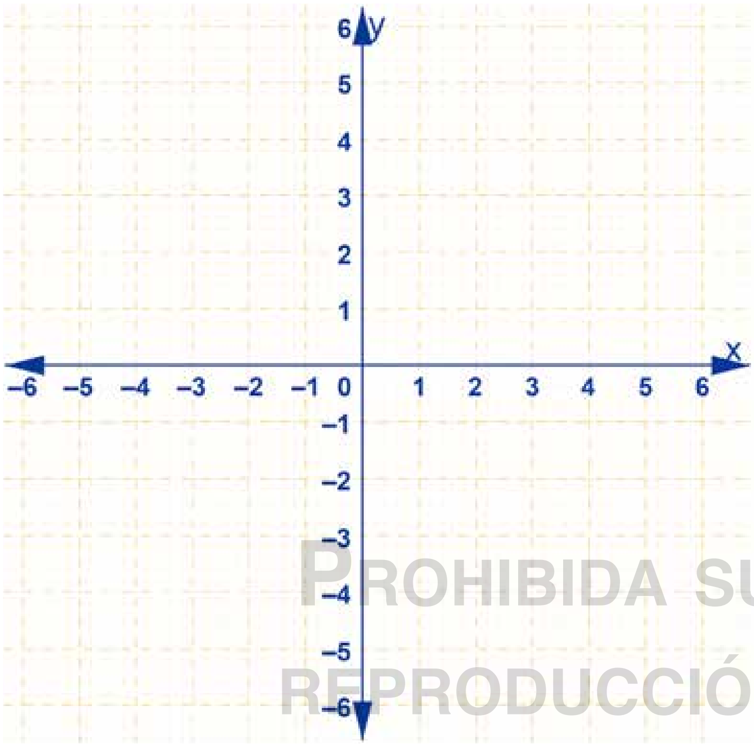
e. $4x^2-25$

4. ¿Cuál es la diferencia entre un lugar geométrico y una función?

5. ¿Cuántos tipos de funciones conoces? Escribe un ejemplo de cada una

6. Encuentra en el plano cartesiano los siguientes puntos:

$(-4, 3), (-1, 3), (-4, -3), (0, 3), (1, 0), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right), (\sqrt{2}, -2)$



7. Resuelve la siguiente desigualdad $3x+4>2$ y grafícala en la recta numérica

8. Evalúa la siguiente función en $x=-2$, $f(x)=x^3+x^2+3$

Categorías de aprendizaje:
- Procedural

Subcategorías
- Elementos variacionales.

Metas de aprendizaje:
- Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.

Categoría de aprendizaje:
- Procesos de intuición y razonamiento

Subcategorías:
- Capacidad para observar y conjeturar.
- Pensamiento intuitivo.
- Pensamiento formal.

Metas de aprendizaje:
- Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.

Categoría de aprendizaje:
- Solución de problemas y modelación.

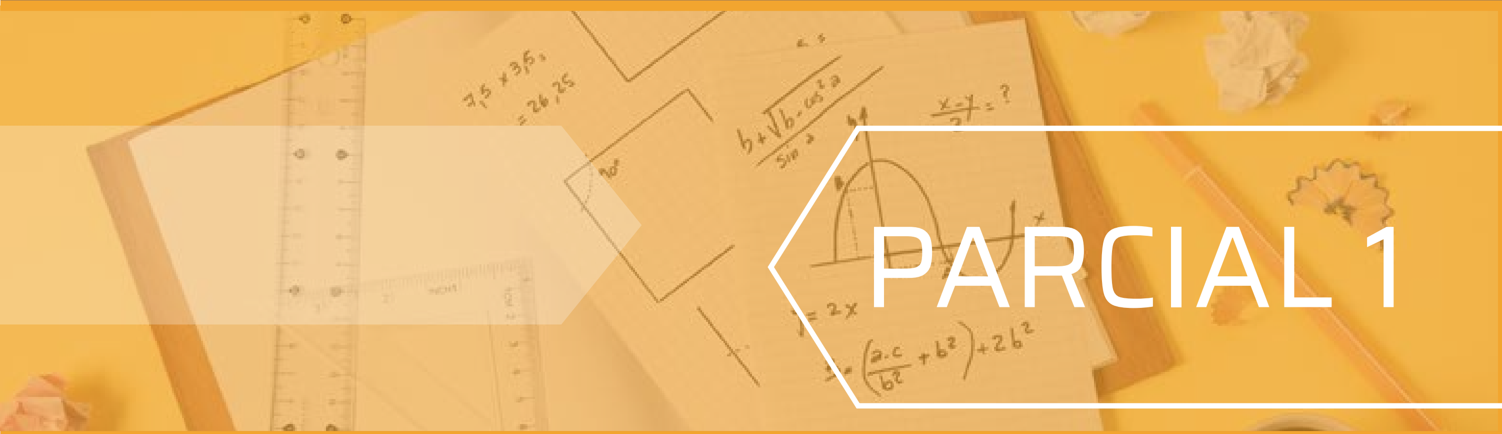
Subcategorías:
- Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
- Uso de modelos

Metas de aprendizaje:
- Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.
- Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.

Categoría de aprendizaje:
- Interacción y lenguaje matemático

Subcategorías:
- Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico.
- Negociación de significados

Meta de aprendizaje:
- Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.



PARCIAL 1

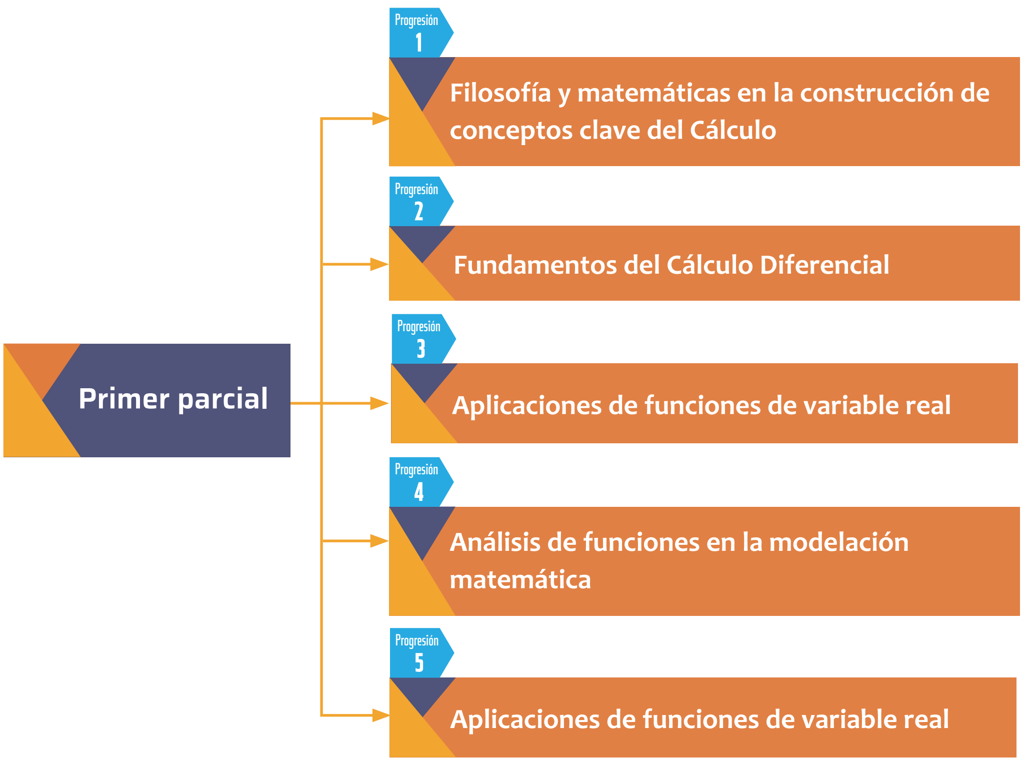
Aprendizaje de trayectoria:
- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados, para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

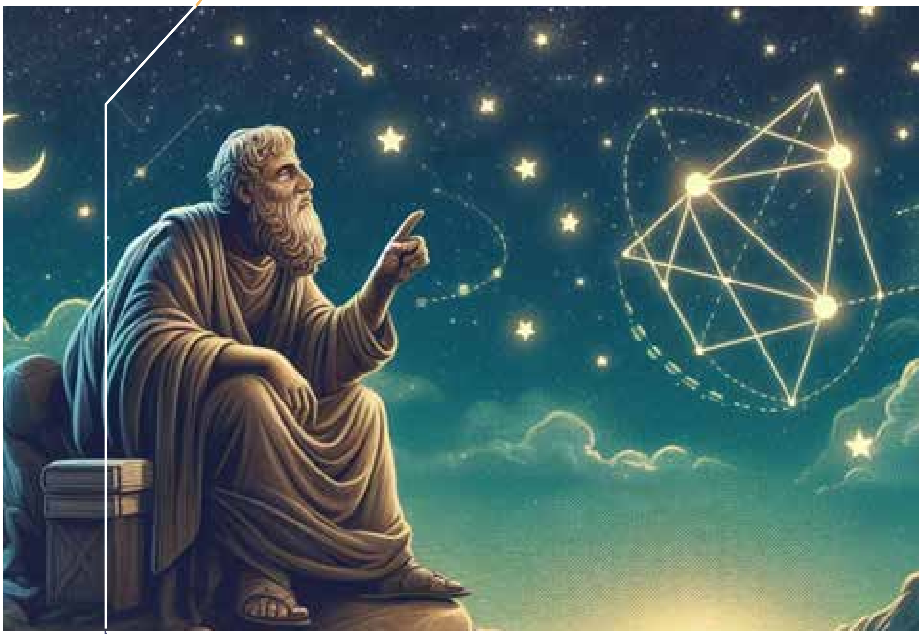
Progresiones:

1. Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.
2. Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.
3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.
4. Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.
5. Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.

PRESENTACIÓN DEL PRIMER PARCIAL

El primer parcial del libro Pensamiento Matemático III aborda las bases fundamentales del Cálculo bajo la perspectiva de la Nueva Escuela Mexicana, explorando conceptos clave como la variación promedio, la variación instantánea y los procesos infinitos, mediante la revisión de las contribuciones de figuras históricas en filosofía y matemáticas. Se profundiza en la resolución intuitiva de problemas que llevaron al surgimiento del Cálculo Diferencial, como determinar la recta tangente a una curva. Se analizan situaciones donde el cambio es central, utilizando funciones reales de variable real, y se examinan aspectos gráficos como simetrías, continuidad y máximos y mínimos relativos. Se concluye conceptualizando el límite de una función como una herramienta para entender el comportamiento local de la gráfica. Una inmersión fascinante en el mundo del Cálculo y el desarrollo del pensamiento matemático.





Progresión 1

APERTURA

Filosofía y matemáticas en la construcción de conceptos clave del Cálculo

Desde tiempos inmemoriales, filósofos y matemáticos han explorado las complejidades del universo, buscando comprender su funcionamiento a través de la observación, el razonamiento y la formulación de teorías. En este contexto de búsqueda incansable de conocimiento, surge la intersección entre la filosofía y las matemáticas, dos disciplinas aparentemente dispares, pero profundamente entrelazadas en su objetivo de desentrañar los misterios del mundo que nos rodea.

En esta exploración, destacados pensadores de la historia han dejado un legado invaluable, sentando las bases para lo que ahora conocemos como Cálculo. A través del estudio de la variación, los procesos infinitos y el movimiento, estos visionarios han moldeado conceptos clave que fundamentan nuestra comprensión moderna del Cálculo.

En este viaje intelectual, nos sumergiremos en las contribuciones de estos pioneros, explorando cómo sus ideas han permeado a través del tiempo y han dado forma a la estructura conceptual del Cálculo que hoy día utilizamos. Desde Aristóteles hasta Newton, desde Zenón hasta Leibniz, cada uno aportó una pieza fundamental al rompecabezas del cálculo moderno. Desde la antigua Grecia, filósofos y matemáticos como Arquímedes se han preguntado cómo calcular el área de figuras curvas. Siglos después, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz desarrollaron el cálculo infinitesimal, una herramienta matemática que permite calcular la velocidad, la aceleración y el cambio de cualquier variable en función del tiempo. Este avance ha sido fundamental para comprender el movimiento de los planetas, el comportamiento de la luz y el funcionamiento del universo en general.

Variaciones, procesos infinitos y movimiento

Las paradojas de Zenón, un conjunto de argumentos aparentemente contradictorios presentados por el filósofo griego Zenón de Elea en el siglo V a.C., nos invitan a reflexionar sobre la naturaleza del movimiento y la continuidad. Aunque inicialmente desconcertantes, estas paradojas revelan profundas verdades sobre la variación, los procesos infinitos y el movimiento, elementos esenciales en el estudio del cálculo.

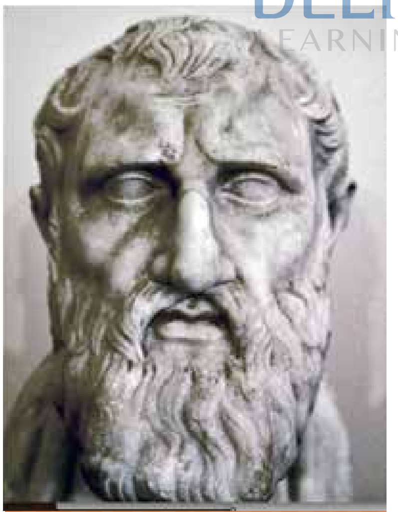
La paradoja de Aquiles y la tortuga es una de las más conocidas. En ella, Zenón plantea que, si Aquiles persigue a una tortuga y le da ventaja, nunca podrá alcanzarla, ya que cada vez que llegue al punto donde estaba la tortuga, esta, ya habrá avanzado un poco más.

Esta paradoja ilustra la noción de límites y la idea de que una serie infinita de movimientos puede sumar una distancia finita, desafiando nuestra intuición sobre la naturaleza del espacio y el tiempo.

¿Cómo podemos resolver esta paradoja? El cálculo nos ofrece herramientas para entender este fenómeno. La idea de límite nos permite conceptualizar el infinito y entender cómo, a pesar de la infinitud de los pasos de Aquiles, su distancia con la tortuga eventualmente se hace cero, permitiéndole alcanzarla.

Otra paradoja intrigante es la de la flecha en vuelo. Zenón argumenta que, en cualquier momento dado, la flecha está en reposo, ya que en ese instante no está moviéndose de un lugar a otro. Sin embargo, esto contradice nuestra experiencia sensorial de ver la flecha en movimiento. Esta paradoja nos lleva a reflexionar sobre la naturaleza del cambio y la continuidad, y cómo el cálculo nos ayuda a entender el movimiento como una sucesión infinitesimal de instantes, cada uno con su propia variación.

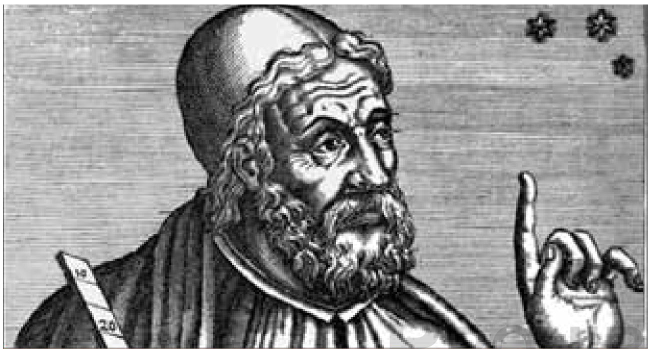
Ahora, ¿te atreves a resolver una paradoja? Reflexiona sobre la siguiente pregunta: Si dividimos una distancia en infinitas partes, ¿cuál es la suma de todas esas partes? Piensa en cómo el cálculo aborda este tipo de situaciones y cómo la noción de límite nos permite comprender la naturaleza de los procesos infinitos y la variación continua.



Zenón de Elea (c. 495 - 430 a.C.) fue un filósofo griego conocido por sus famosas paradojas, que han fascinado a los matemáticos durante siglos. Un ejemplo es la paradoja del movimiento: imagina que quieres correr una carrera de 100 metros. Primero tienes que correr la mitad de la distancia (50 metros). Pero antes de hacer eso, tienes que correr un cuarto de la distancia (25 metros). Antes de correr un cuarto, tienes que correr 1/8, 1/16, y así sucesivamente. Esta es una serie infinita de tareas, ¡lo que significa que nunca llegarás!

Aportes fundamentales en el Cálculo

Eudoxo de Cnidus, un matemático y astrónomo griego del siglo IV a.C., realizó contribuciones significativas que sentaron las bases para el desarrollo posterior del Cálculo. Aunque no se le atribuyen descubrimientos directos en el sentido moderno del Cálculo, su trabajo en la teoría de las proporciones y su método exhaustivo para aproximar áreas y volúmenes fueron precursoras importantes para el desarrollo de conceptos y técnicas fundamentales en el Cálculo.



Eudoxo de Cnido (Εὔδοξος ὁ Κνίδιος, c. 390 - 337 a.C.) fue un antiguo astrónomo y matemático griego. Entre sus contribuciones más duraderas a la astronomía se encuentran sus modelos planetarios. La historia lo recuerda como el primero en escribir una explicación matemática de los planetas. Desarrolló el método de exhaución en matemáticas, que sentó las bases para el cálculo integral. Eudoxo viajó a varios lugares alrededor del Mediterráneo para estudiar. Estudió con Platón en Atenas, Grecia, y con sacerdotes egipcios en Heliópolis, Egipto. Más tarde regresó a Atenas para enseñar en la Academia de Platón durante la época en que Aristóteles era estudiante.

Una de las contribuciones más destacadas de Eudoxo fue su teoría de las proporciones, que desarrolló como parte de su estudio de la proporción áurea y otras relaciones matemáticas. Esta teoría establecía un marco para comparar magnitudes y entender sus relaciones proporcionales, lo cual es esencial en el Cálculo Diferencial e Integral para comprender el concepto de límites y la idea de infinitesimales.

Eudoxo también introdujo el método exhaustivo para aproximar áreas y volúmenes de figuras geométricas. Este método consistía en inscribir y circunscribir polígonos regulares alrededor de una figura dada y luego ajustar gradualmente el número de lados del polígono para obtener una mejor aproximación del área o volumen deseado. Aunque este enfoque no era rigurosamente formal como los métodos utilizados en el cálculo moderno, sentó las bases para el desarrollo posterior de técnicas de integración y aproximación de áreas bajo curvas.

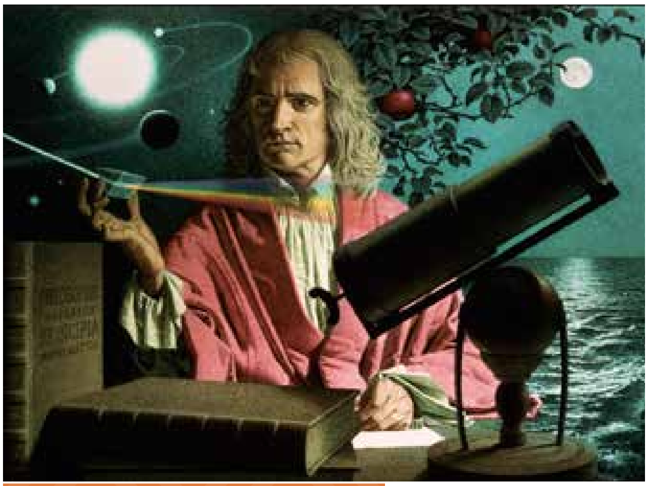
Además, Eudoxo fue uno de los primeros en desarrollar una teoría sistemática de movimientos astronómicos, lo cual implicaba el estudio de trayectorias y velocidades variables, conceptos que son fundamentales en el cálculo. Aunque su enfoque era más geométrico y cualitativo que cuantitativo, sus ideas proporcionaron un marco conceptual para entender el cambio y la variación en fenómenos naturales, sentando así las bases para el análisis matemático moderno.

Arquímedes, el genio de la Antigua Grecia, y Newton, el visionario de la Revolución Científica, son dos figuras fundamentales en la historia del Cálculo. Sus contribuciones en la formalización de métodos para el cálculo de

Arquímedes (c. 287 - 212 a. C.) fue un antiguo científico e ingeniero griego, y uno de los mejores matemáticos de todos los tiempos. Descubrió muchos conceptos de cálculo y trabajó en geometría, análisis y mecánica.

Mientras se bañaba, Arquímedes descubrió una forma de determinar el volumen de objetos irregulares utilizando la cantidad de agua que desplazaban cuando se sumergían. Estaba tan emocionado por este descubrimiento que salió corriendo a la calle, todavía desnudo, gritando "¡Eureka!" (en griego para "¡Lo he encontrado!").

Como ingeniero, construyó ingeniosas máquinas de defensa durante el asedio de su ciudad natal, Siracusa, en Sicilia. Después de dos años, los romanos finalmente lograron entrar, y Arquímedes fue asesinado. Sus últimas palabras fueron "No molestar a mis círculos", que estaba estudiando en ese momento.



áreas, tangentes y límites sentaron las bases del cálculo diferencial e integral, dos ramas inseparables que constituyen el núcleo del análisis matemático moderno.

Arquímedes, conocido por su ingenio y meticulosidad, fue pionero en el estudio de las áreas y volúmenes de figuras geométricas. Sus métodos revolucionarios, como el método exhaustivo o por agotamiento, le permitieron calcular áreas de figuras curvas mediante la aproximación con polígonos regulares inscritos y circunscritos. Este enfoque precursor del cálculo integral sentó las bases para el desarrollo posterior de técnicas más sofisticadas de integración.

Sir Isaac Newton (1642-1726) fue un físico, matemático y astrónomo inglés, y uno de los científicos más influyentes de todos los tiempos. Fue profesor en la Universidad de Cambridge y presidente de la Royal Society en Londres.

En su libro Principia Mathematica, Newton formuló las leyes del movimiento y la gravedad, que sentaron las bases de la física clásica y dominaron nuestra visión del universo durante los próximos tres siglos.

Entre muchas otras cosas, Newton fue uno de los inventores del cálculo, construyó el primer telescopio reflector, calculó la velocidad del sonido, estudió el movimiento de los fluidos y desarrolló una teoría del color basada en cómo los prismas dividen la luz solar en un espectro de color arcoíris.

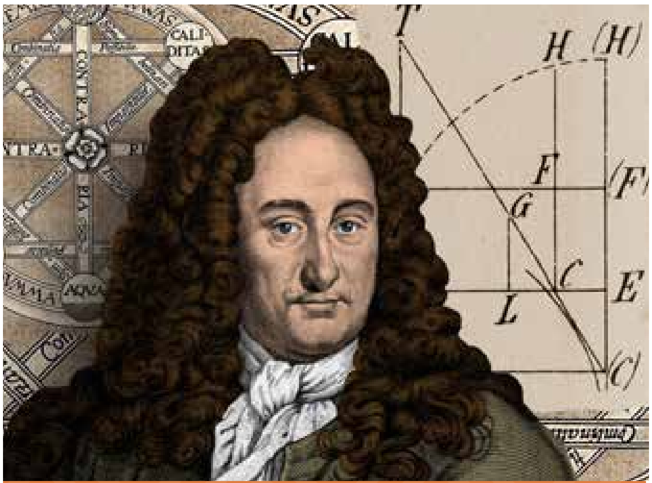
¿Puedes imaginar cómo Arquímedes calculó el área de un círculo? Te invito a realizar un ejercicio mental: ¿qué sucedería si inscribieras un polígono regular de n lados dentro de un círculo y luego aumentaras el número de lados n hasta el infinito? ¿Cómo se relacionaría el perímetro del polígono con la circunferencia del círculo? Este ejercicio te ayudará a comprender cómo Arquímedes se acercó al concepto de límite, un concepto esencial en el cálculo.

Por otro lado, Isaac Newton, con su obra monumental "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica", formalizó el cálculo diferencial e integral en un marco matemático riguroso. Su invención del cálculo infinitesimal, junto con Gottfried Wilhelm Leibniz, revolucionó nuestra comprensión del cambio y la acumulación, permitiendo el análisis de funciones continuas y la resolución de problemas complejos en física, ingeniería y otras áreas de la ciencia.

Newton introdujo el concepto de derivada para calcular la tasa de cambio instantánea de una función, abriendo las puertas al estudio de fenómenos dinámicos como el movimiento de los cuerpos y la variación de magnitudes físicas. Además, desarrolló el método de las diferencias finitas para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales, una herramienta invaluable en la modelización de sistemas dinámicos.

¿Cómo crees que Newton calculó la tangente a una curva en un punto dado? Reflexiona sobre el concepto de pendiente de una recta y cómo este concepto se generaliza para calcular la derivada de una función en un punto. ¿Puedes pensar en aplicaciones prácticas de este concepto en el mundo real?

Gottfried Wilhelm Leibniz, el polímata alemán del siglo XVII, es una figura central en la historia del Cálculo. Sus contribuciones revolucionarias sentaron las bases del cálculo diferencial e integral, transformando la forma en que comprendemos el cambio y la acumulación en matemáticas y ciencias aplicadas.
Una de las aportaciones más significativas de Leibniz al cálculo fue la invención del cálculo infinitesimal de manera independiente y simultánea a Isaac Newton. Leibniz desarrolló su propio sistema de notación, que incluía el uso de símbolos como "dx" y "dy" para representar incrementos infinitesimales de variables, y la notación de la integral definida utilizando el símbolo "∫". Esta



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) fue un matemático y filósofo alemán. Entre muchos otros logros, fue uno de los inventores del cálculo y creó algunas de las primeras calculadoras mecánicas.

Leibniz creía que nuestro universo es el "mejor universo posible" que Dios podría haber creado, al tiempo que nos permite tener libre albedrío. Fue un gran defensor del racionalismo, y también hizo contribuciones a la física, la medicina, la lingüística, el derecho, la historia y muchas otras materias.

notación, que aún se utiliza en la actualidad, simplificó enormemente la expresión de conceptos y operaciones en cálculo, permitiendo una comprensión más intuitiva y poderosa de los procesos matemáticos involucrados.

Además de su contribución notacional, Leibniz formalizó el concepto de derivada como la tasa de cambio instantánea de una función en un punto dado. Introdujo la idea de diferencial como un incremento infinitesimal de una variable, sentando así las bases para el cálculo diferencial moderno. Su enfoque geométrico del cálculo, basado en la interpretación de la derivada como la pendiente de una curva en un punto, facilitó la comprensión intuitiva de conceptos clave y su aplicación en problemas prácticos.

Otra contribución importante de Leibniz fue el desarrollo del teorema fundamental del cálculo, que establece la relación fundamental entre la integral y la derivada de una función. Este teorema, que conecta el cálculo integral con el diferencial, es una herramienta fundamental en el análisis matemático y tiene una amplia variedad de aplicaciones en física, ingeniería, economía y otras disciplinas.

CIERRE

Actividad de APRENDIZAJE 1

Principio de la Nueva Escuela Mexicana

Ámbito

I. Reúnanse en parejas y elijan una de las paradojas de Zenón y represéntenla de forma creativa: dibujo, poema, historieta, video, etc.

- **Expliquen la paradoja de forma clara y concisa, utilizando ejemplos y recursos visuales.**
- **Presenten su trabajo al resto de la clase y participen en un debate sobre las diferentes perspectivas y soluciones a las paradojas.**
- **Preguntas para la reflexión:**
  ¿Qué papel juega la intuición en la comprensión del movimiento y el infinito?
  ¿Cómo podemos utilizar la lógica y las matemáticas para analizar las paradojas de Zenón?
  ¿Qué impacto han tenido las paradojas de Zenón en el desarrollo del pensamiento filosófico y científico?
  ¿Qué preguntas siguen abiertas en torno a las paradojas de Zenón y el infinito?

II. Formen grupos pequeños. Cada grupo tendrá un juego de tarjetas o fichas numeradas del 1 al 10, que representarán los distintos puntos en la carrera de Aquiles y la Tortuga. Posteriormente simulen la carrera de Aquiles y la Tortuga utilizando las tarjetas. La Tortuga comenzará en la tarjeta 1, mientras que Aquiles comenzará en la tarjeta 10. Aquiles avanzará la mitad de la distancia entre él y la Tortuga en ese momento. Después de cada turno, discutan en su grupo si Aquiles alcanza alguna vez a la Tortuga y por qué. Una vez que todos los grupos hayan completado varios turnos, permitan que compartan sus conclusiones y reflexiones con el resto de la clase. Planteen posibles soluciones a la paradoja y a discutan las implicaciones filosóficas y matemáticas involucradas.

III. De manera individual, crea una línea del tiempo haciendo uso de materiales de reciclaje donde plasmes las principales aportaciones matemáticas a través de los años para establecer los fundamentos del Cálculo que hoy en día conocemos. Presenta a tus compañeros de clase tu trabajo y expón cuáles aportaciones te parecieron más interesantes.

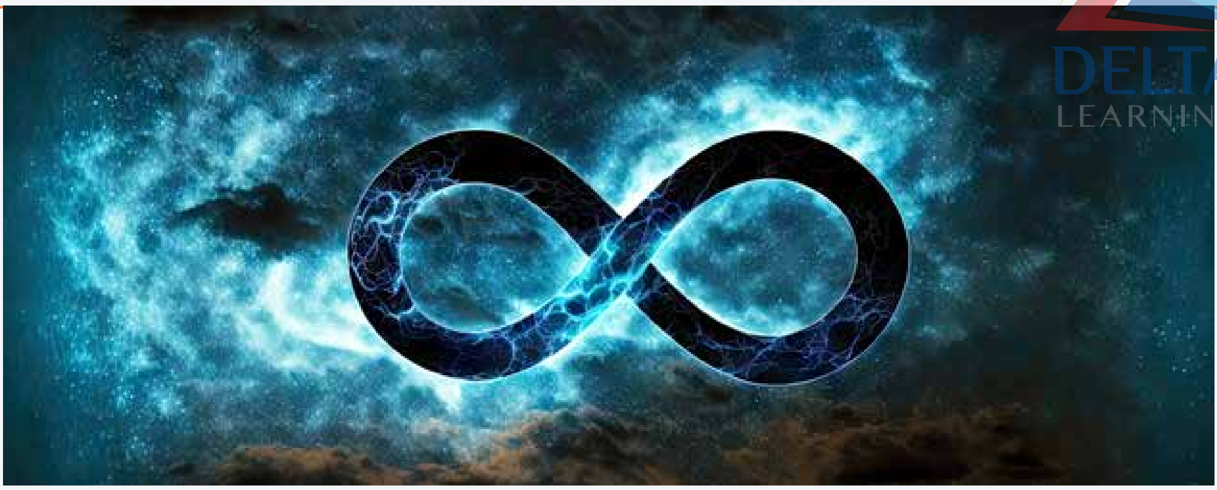
Habilidad LECTORA

Las paradojas de Zenón, Parménides, Reichenbach, Borges, Russell y los conjuntos infinitos

Zenón de Elea, filósofo griego perteneciente a la escuela de Elea y discípulo de Parménides, es reconocido por sus aporías, como la paradoja de Aquiles y la tortuga, la de la flecha y la del estadio. A través de estas paradojas, Zenón buscaba demostrar la unidad del ser, argumentando que el espacio es indivisible y que la división infinita del ser conduce a contradicciones. Sin embargo, el rigor de las matemáticas, basado en la lógica y los principios del pensamiento humano, ha demostrado un orden que desafía la intuición. Por tanto, la solución a estas paradojas reside en el ámbito matemático, donde se aplican las herramientas adecuadas para comprender y resolver tales contradicciones.

Aquiles y la tortuga

La paradoja de Aquiles y la tortuga es un ejemplo clásico de contradicción aparente en el movimiento. Aquiles, el corredor más veloz, da una ventaja inicial a la tortuga en una carrera. A medida que Aquiles avanza hacia la meta, la tortuga también avanza, pero a un ritmo más lento. Según Zenón, esto lleva a una serie infinita de distancias que Aquiles debe recorrer, lo que sugiere que nunca alcanzará a la tortuga. Aunque la intuición indica lo contrario, estas especulaciones desafían la idea de movimiento al considerar que cada distancia requiere una fracción



infinita de tiempo para ser recorrida. Estas paradojas se basan en la noción de un espacio y tiempo discontinuos, desafiando así la lógica convencional y la experiencia cotidiana.

La concepción del tiempo

La concepción del tiempo es un tema complejo que influye en la formulación de paradojas, según Hans Reichenbach. Nuestra experiencia emocional con el tiempo y su transcurso puede llevar a confusiones lógicas, ya que intentamos comprender su naturaleza volátil y su inevitable avance. Aunque no podemos controlar ni detener el tiempo, sí podemos reflexionar sobre su pasado y regular nuestras acciones hacia el futuro. Parménides, con su idea de un ser atemporal e inmutable, y Zenón, con sus paradojas sobre el movimiento, ejemplifican cómo las concepciones filosóficas intentan abordar la naturaleza del tiempo. Reichenbach sugiere que estas filosofías son respuestas emocionales al deseo de escapar al flujo temporal y mitigar el temor a la muerte.

La solución de Borges

Borges, apasionado por los enigmas filosóficos desde niño, recuerda cómo su padre le enseñó las paradojas de Zenón utilizando un tablero de ajedrez, lo que inspiró su interés en el tema. Destaca la relación entre movimiento, tiempo y espacio, argumentando que el movimiento es inconcebible sin tiempo y que la inmovilidad carece de sentido sin él. Borges señala que la comprensión del movimiento implica la comparación con algo estático como referencia, lo que da origen al concepto de velocidad y a numerosas teorías físicas. Analiza las paradojas de Zenón, indicando que se basan en propiedades imposibles de atribuir al espacio. Borges sugiere que la escuela de Elea confunde los conceptos de movimiento y espacio recorrido, creyendo erróneamente que cada parte del movimiento de Aquiles puede ser reconstruida independientemente, lo que lleva a la idea de que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

La solución de Russell

Bertrand Russell, contemporáneo de Reichenbach, expone que una colección infinita puede desdoblarse en series infinitas. Argumenta que la cantidad de puntos en el universo es igual en cualquier unidad de medida, mostrando así la continuidad matemática de la línea. Russell demuestra que los argumentos de Zenón sentaron las bases de teorías sobre espacio, tiempo e infinito, y resuelve la paradoja de Zenón al incluir el tiempo como variable. Aplica su razonamiento al problema de Aquiles, concluyendo que cada punto ocupado por la tortuga corresponde a uno ocupado por Aquiles, lo que iguala sus trayectorias matemáticamente.

Infinitos y continuidad

La teoría del infinito y los procesos en el tiempo, desarrollada en el siglo XIX, establece que existen diferentes tipos de infinitos, pero todos siguen siendo infinitos. Georg Cantor introdujo la teoría de conjuntos, donde demostró que ciertos conjuntos infinitos pueden ser equivalentes a sus subconjuntos. Cantor definió un conjunto infinito como aquel que puede ponerse en correspondencia uno a uno con alguna de sus partes. Esta noción de infinito es distinta de la de los antiguos axiomas matemáticos, como el de Euclides, que afirmaba que "el todo es mayor que sus partes". Cantor mostró que el conjunto de los números reales es no numerable, lo que significa que hay un tipo de infinito mayor que el de los números enteros. Así, se distinguen dos tipos de infinitud: el numerable de los enteros y el no numerable de los números reales. Cantor también introdujo el concepto de números cardinales transfinitos, representados por la letra aleph del alfabeto hebreo. Estos números refieren a representantes de conjuntos bien ordenados infinitos. En física, la idea de infinito se aplica al universo, que se entiende como infinito desde Copérnico. La noción de infinito sigue siendo una idea intrigante y compleja en la mente humana, llena de paradojas y misterios.

Convergencia de esta serie

Según Zenón, si consideramos que la carrera ocurre en un movimiento finito y hay un número infinito de puntos para las posiciones, esto lleva al absurdo de que pueden tocarse un número infinito de puntos en un tiempo finito. Es como decir que el conjunto (infinito) de los números reales es equivalente a un conjunto finito, lo cual no es posible, puesto que Aquiles necesitaría entonces de un tiempo infinito para cubrir una distancia infinita. La solución está en que Aquiles sí puede alcanzar a la tortuga porque un número infinito de distancias no se desvanece; éstas convergen en un número finito, en una suma finita, y pueden ser recorridas en un tiempo finito.

Borges definió esta paradoja como una joya: "no sé de mejor calificación para la paradoja de Aquiles, tan indiferente a las decisivas refutaciones que desde más de veintitrés siglos la derogan, que ya podemos saludarla inmortal". Como lo dice él mismo, vale por tanto recordarla, visitarla nuevamente, y preguntarse junto con el célebre escritor: "¿Tocar a nuestro concepto del universo, por ese pedacito de tiniebla griega?".

Texto adaptado para fines didácticos. Mosso Rojas, Miroslava. 2014. Las paradojas de Zenón, Parménides, Reichenbach, Borges, Russell y los conjuntos infinitos. Ciencias, núm. 113-114, abril-septiembre, pp. 83-91. [https://is.gd/uKsrmC].

1. **Después de haber leído, subraya las ideas principales y las preguntas que te surjan al leer. Define los siguientes términos: paradoja, movimiento, tiempo, espacio, infinito, continuo, conjunto, numerable, no numerable, escribiéndolos en tu cuaderno.**

2. **Formen grupos de 3 a 4 personas. Comenten las ideas principales del texto y las preguntas que surgieron durante la lectura individual.**

3. **Analicen las paradojas de Zenón: ¿Qué argumentos utiliza? ¿Por qué son desafiantes para la intuición? ¿Cómo se relacionan con la concepción del movimiento y el tiempo?**

4. **Comparen las soluciones propuestas por Reichenbach, Borges y Russell. ¿Cuáles son sus similitudes y diferencias? ¿Qué enfoque te parece más convincente? ¿Por qué?**

5. **Exploren el concepto de infinito: ¿Qué tipos de infinitos existen? ¿Cómo se relacionan con las paradojas de Zenón? ¿Qué aplicaciones tienen en la física y otras áreas del conocimiento?**

Progresión 2

Fundamentos del Cálculo Diferencial

APERTURA

El Cálculo Diferencial surge como una respuesta a un desafío matemático fundamental: la necesidad de determinar la recta tangente a una curva en un punto específico. Este problema, aparentemente simple en su enunciado, planteaba un verdadero dilema para los matemáticos de siglos pasados.

Antes del desarrollo del Cálculo Diferencial, los matemáticos se enfrentaban a dificultades para comprender y trabajar con la noción de cambio instantáneo, esencial para entender el comportamiento de las curvas en un punto dado. La pregunta de cómo medir la pendiente de una curva en un punto específico resultaba especialmente desafiante.

Fue Isaac Newton quien, junto con Gottfried Wilhelm Leibniz, formuló los principios del cálculo diferencial en el siglo XVII. Estos principios revolucionaron el campo de las matemáticas al proporcionar un marco conceptual para abordar problemas relacionados con el cambio y la variación.

La idea central del cálculo diferencial es la noción de derivada, que representa la tasa de cambio instantáneo de una función en un punto dado. La derivada de una función en un punto es precisamente la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Esta conexión entre la derivada y la recta tangente permitió a los matemáticos resolver problemas que anteriormente parecían insolubles.

El desarrollo del cálculo diferencial no solo tuvo un impacto significativo en las matemáticas, sino también en otras áreas del conocimiento, como la física, la economía, la ingeniería y la biología. Las aplicaciones del cálculo diferencial son vastas y van desde la modelización del movimiento de los cuerpos hasta la optimización de funciones en problemas de ingeniería.

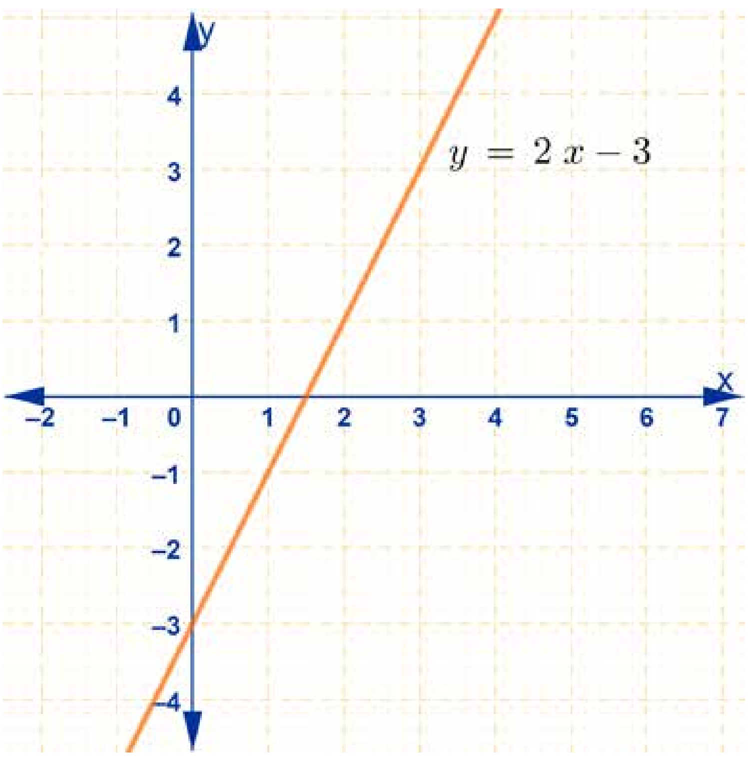
Problemas que desafiaron a los matemáticos

El problema de la recta tangente a una curva ha sido objeto de interés desde la antigüedad, y su evolución hasta su formalización en el cálculo involucra varios hitos importantes en la historia de las matemáticas.

Los antiguos matemáticos griegos, como Euclides y Apolonio, realizaron importantes contribuciones al estudio de las figuras geométricas y las líneas rectas. Aunque no abordaron directamente el problema de la recta tangente a una curva, sentaron las bases para el desarrollo posterior de la Geometría Analítica.

En el siglo XVII, René Descartes introdujo la Geometría Analítica, que permite representar las curvas mediante ecuaciones algebraicas. Esto permitió estudiar las propiedades de las curvas de manera más sistemática y abrió el camino para abordar el problema de la recta tangente de manera algebraica.

Recordemos que una línea recta se puede definir como: una sucesión infinita de puntos que se extiende en una misma dirección sin curvarse en ninguna parte. Geométricamente, se puede definir como la trayectoria más corta entre dos puntos en un plano o en el espacio tridimensional. Formalmente, una línea recta se caracteriza por tener la misma pendiente en todos sus puntos y puede ser descrita mediante una ecuación lineal de la forma $y=mx+b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.



Gráfica 1. Representación de una línea recta en el plano cartesiano, donde la pendiente es m=2 y la ordenada al origen b=-3.

Pierre de Fermat fue uno de los primeros en estudiar la tangencia de las curvas. Desarrolló métodos para encontrar las tangentes a las curvas, aunque su enfoque era más geométrico que algebraico.

En el siglo XVII, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz formularon los principios del Cálculo Diferencial de manera independiente. Introdujeron el concepto de derivada, que representa la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. Este fue un paso crucial en la formalización del problema de la recta tangente y su solución.

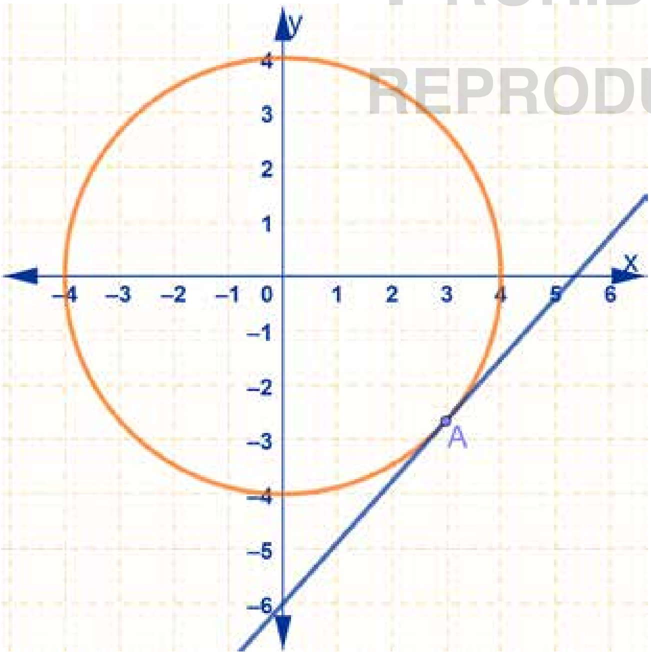
Leonhard Euler, en el siglo XVIII, contribuyó significativamente al desarrollo del Cálculo y la teoría de funciones. Euler introdujo la función exponencial e^x, donde e es la base del logaritmo natural. Esta función es fundamental en muchas áreas de las matemáticas y la ciencia, y Euler demostró muchas de sus propiedades importantes; demostró que $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$, donde i es la unidad imaginaria. Esta relación, conocida como la fórmula de Euler, relaciona las funciones exponenciales, trigonométricas e imaginarias, y es una herramienta poderosa en el análisis matemático. Euler estudió las series infinitas y desarrolló técnicas para manipularlas y sumarlas. Sus contribuciones en este campo incluyen la fórmula de Euler para la suma de los cuadrados de los números naturales y la fórmula de Euler-Maclaurin para la aproximación de sumas infinitas mediante integrales. Sus trabajos ayudaron a consolidar y generalizar los conceptos introducidos por Newton y Leibniz, incluyendo el estudio de las tangentes a las curvas.

En conjunto, estos antecedentes históricos reflejan la evolución del problema de la recta tangente a lo largo del tiempo, desde los primeros intentos en la geometría griega hasta su formalización en el marco del Cálculo Diferencial en los siglos XVII y XVIII. Este problema ha sido fundamental en el desarrollo de las matemáticas y ha tenido un impacto significativo en numerosas áreas del conocimiento.

El enigma de la tangente

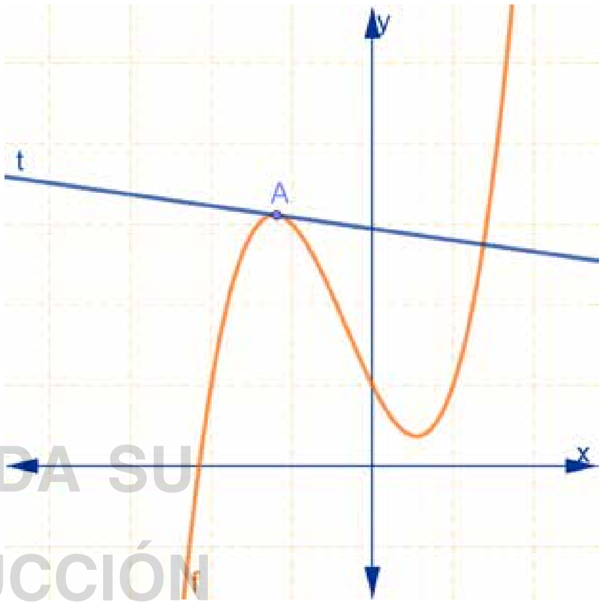
La palabra tangente se deriva de la voz latina tangens, que significa “tocar”. Así, una tangente a una curva es una recta que toca la curva. En otras palabras, una recta tangente debe tener la misma dirección que la curva en el punto de contacto.

Es importante tener también en cuenta la diferencia entre las rectas secantes y tangentes. Se define a una recta tangente como una línea recta que toca a una curva en un punto específico de manera que coinciden en ese punto y tienen la misma dirección que la curva en ese punto.



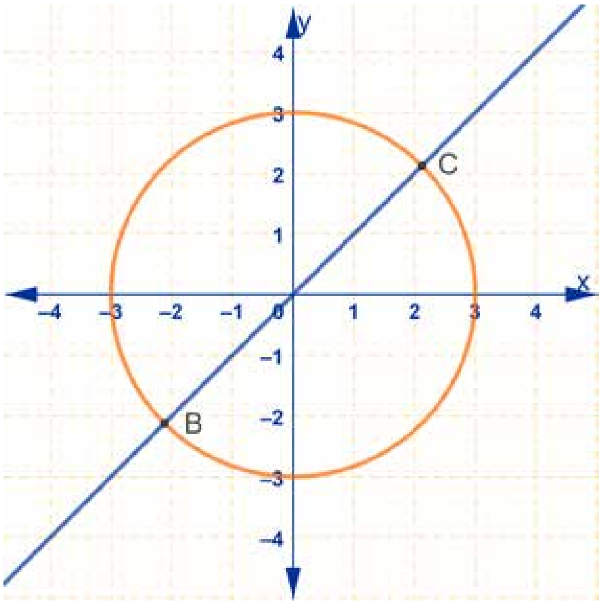
Gráfica 2 Geométricamente, la recta tangente es aquella que se aproxima mejor a la curva en el punto de tangencia sin cruzarla, es decir, la recta tangente "toca" la curva en ese punto sin atravesarla.

Para una circunferencia podemos simplemente seguir la idea de Euclides y decir que la tangente es una recta que interseca la circunferencia una y sólo una vez, como se ve en la gráfica 2. Pero, ¿qué ocurre cuando se tienen curvas más complejas como en la gráfica 3?



Gráfica 3 La recta t toca en dos puntos a la curva f

Por otro lado, una recta secante es una línea recta que corta a una curva en dos o más puntos. Tal como se muestra en la siguiente gráfica.



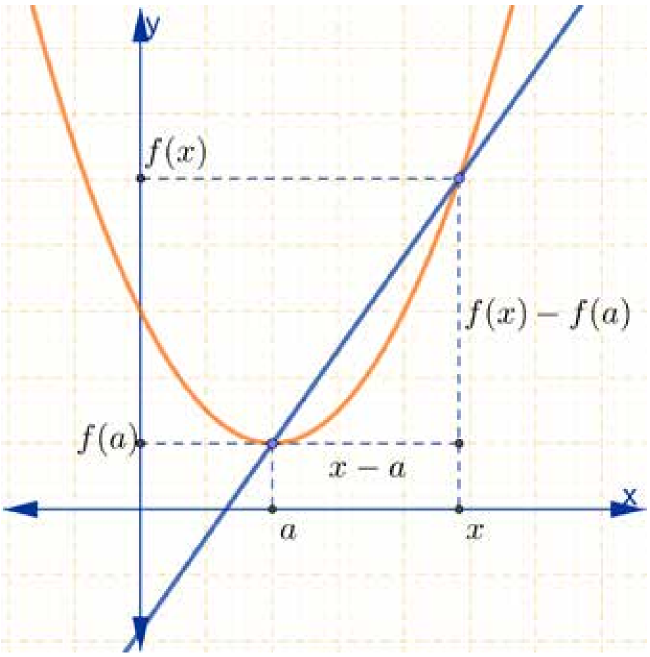
Gráfica 4 La recta secante atraviesa la curva en al menos dos puntos distintos.

En el contexto del Cálculo Diferencial, la recta secante se utiliza para aproximar el comportamiento de una función entre dos puntos dados. Comparada con la recta tangente, la recta secante proporciona una aproximación menos precisa de la curva en el intervalo considerado, ya que corta la curva en más de un punto. La pendiente de la recta secante entre dos puntos corresponde a la variación promedio de la función en ese intervalo.

En la primera mitad del siglo XVII no se conocían métodos generales para calcular la tangente a una curva en un punto de la misma. Este problema se presentaba con frecuencia en mecánica, en óptica y en geometría, y generalmente se resolvía, de forma geométrica, con técnicas adaptadas a cada caso particular. La dificultad está en que, siendo la tangente una recta, se precisa conocer dos puntos de la misma, o bien un punto y su pendiente, para poderla determinar.

Pierre de Fermat, un matemático francés del siglo XVII, contribuyó significativamente al desarrollo temprano del Cálculo y a la comprensión de la Geometría Analítica. Una de las estrategias utilizadas por Fermat para definir la recta tangente a una curva fue mediante el concepto de líneas secantes.

Fermat propuso que, para encontrar la recta tangente a una curva en un punto dado, primero se debe trazar una serie de líneas secantes a la curva que pasen por el punto de interés. Estas líneas secantes, al cortar la curva en dos puntos cercanos al punto de interés, formarían triángulos con vértices en esos puntos.



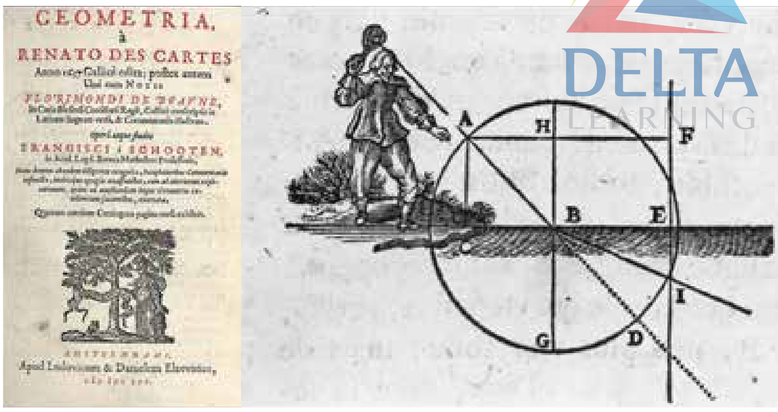
Gráfica 5. Recta secante a una curva f

Luego, Fermat realizó un proceso de aproximación infinitesimal, reduciendo la distancia entre los dos puntos de intersección de las líneas secantes con la curva hasta que fueran prácticamente indistinguibles, es decir, llevando uno de los puntos de intersección infinitamente cerca del punto de tangencia. Acorde a la gráfica 5, a medida que la recta secante se aproxime al punto de tangencia, la diferencia x-a se irá aproximando cada vez más a cero. Este proceso implicaba considerar líneas secantes cada vez más cercanas a la curva, esencialmente transformando las líneas secantes en la recta tangente. ¿A partir de la gráfica cuál es la pendiente de la recta secante? ______________________________

La estrategia de Fermat se basaba en la intuición de que, al acercar los puntos de intersección de las líneas secantes con la curva, la recta que las une se aproximaría a la recta tangente a la curva en el punto de interés. Descartes propuso una estrategia ingeniosa para resolver el problema de la recta tangente a una curva al introducir coordenadas cartesianas en el plano. Esta idea revolucionaria, expuesta en su obra "La Geometría" en 1637, permitió representar geométricamente las ecuaciones algebraicas y viceversa.

Para encontrar la recta tangente a una curva en un punto específico, Descartes desarrolló un método que consistía en encontrar una ecuación algebraica que representara tanto la curva como la recta tangente en ese punto. Esto implicaba calcular la pendiente de la curva en el punto dado, lo que equivale a encontrar la derivada de la función que representa la curva.

Descartes empleó entonces la derivada de la función para determinar la pendiente de la recta tangente en el punto de interés. Utilizando esta pendiente y el punto dado, pudo escribir la ecuación de la recta tangente en forma punto-pendiente, que es una expresión algebraica que describe la relación entre las coordenadas de un punto en la recta y su pendiente.



De esta manera, Descartes logró proporcionar una solución algebraica y geométrica al problema de la recta tangente a una curva, sentando las bases para el posterior desarrollo del cálculo diferencial. Su enfoque permitió a los matemáticos abordar problemas de geometría de una manera completamente nueva, marcando un hito importante en la historia de las matemáticas.

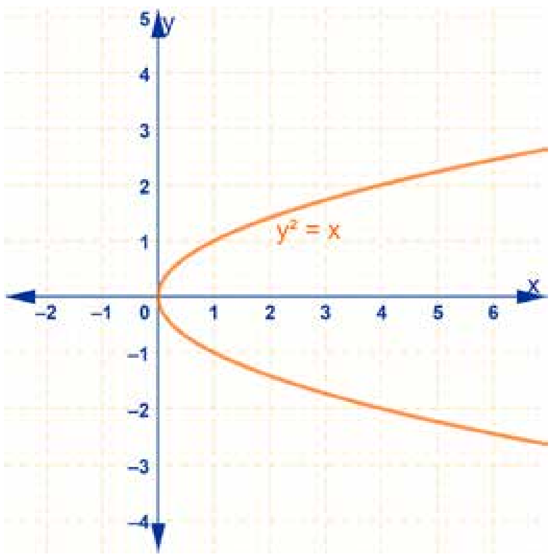
Explorando soluciones intuitivas al problema de la tangente

Veamos como Descartes dio solución al problema de la tangente de una curva a partir del siguiente ejemplo.

Supongamos que tenemos una curva dada por la expresión:

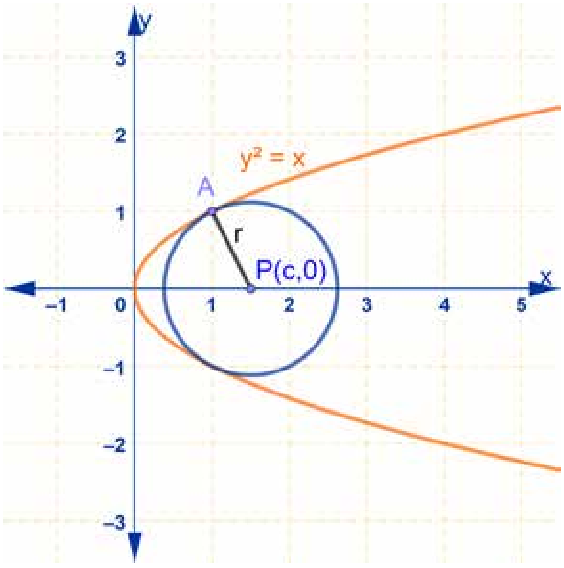
$$y2=x$$

Tal como se aprecia en la siguiente gráfica.



Gráfica 6. Curva que representa una parábola horizontal

Nos interesa encontrar la recta tangente a la curva en el punto $A(1,1)$, para ello trazaremos una circunferencia con centro en $P(c,0)$ y cuyo radio coincida con el punto A.



Gráfica 7. La abscisa del centro de la circunferencia se desconoce.

Es importante recordar que la recta normal a un radio de una circunferencia en su punto de tangencia es perpendicular al radio en ese punto. Es decir, si trazamos una recta desde el centro de la circunferencia hasta el punto de tangencia con la circunferencia, la recta normal en ese punto será perpendicular a dicho radio. Con base a esto si encontramos la pendiente del radio trazado podremos conocer la pendiente de la recta normal al radio con lo que tendremos la recta tangente de la curva inicial en el punto A1,1.

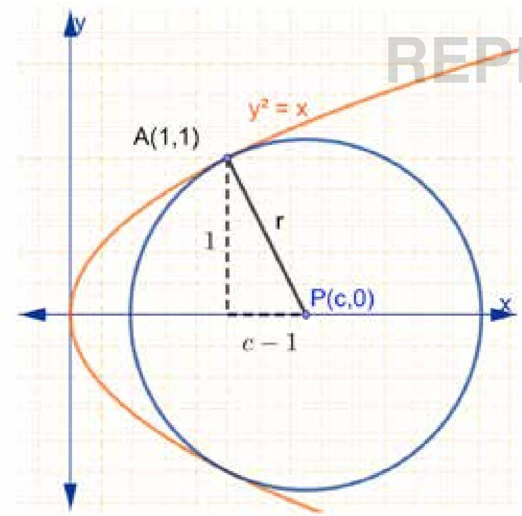
Primero utilizaremos la ecuación ordinaria de la circunferencia.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Sustituimos los valores conocidos y simplificamos.

$$(x-c)^2+(y-0)^2=r^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=r^2 \ldots (1)$$

Ahora para encontrar el radio haremos la siguiente construcción para resolver mediante el teorema de Pitágoras. Aplicando el teorema de Pitágoras.



Gráfica 8. Se forma un triángulo rectángulo que resolveremos con el teorema de Pitágoras.

$$(c-1)^2+(1)^2=r^2$$
$$c^2-2c+1+1=r^2$$
$$c^2-2c+2=r^2 \ldots (2)$$

Ahora igualamos las ecuaciones (1) y (2)

$$x^2-2cx+c^2+y^2=c^2-2c+2$$
$$x^2-2cx+y^2=-2c+2$$

Como nuestra ecuación de la curva inicial es $y^2=x$ podemos entonces sustituirla en la ecuación obtenida.

$$x^2-2cx+x=-2c+2$$
$$x^2+(1-2c)x+(2c-2)=0$$

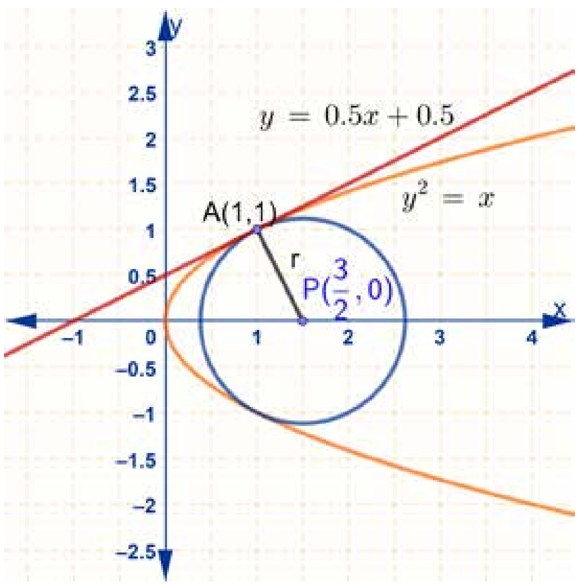
Ahora resolvemos la ecuación, dado que se desea conocer la intersección de la circunferencia con la curva y sólo nos interesa una sola intersección, necesitamos encontrar el discriminante cuando este sea igual a cero. Es decir, usando la formula general tenemos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$b^2-4ac=0$$

Sustituimos los valores obtenidos:

$$(1-2c)^2-4(1)(2c-2)=0$$
$$1-4c+4c^2-8c+8=0$$
$$4c^2-12c+9=0$$
$$c=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(4)(9)}}{2(4)}$$
$$c=\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la coordenada del centro de la circunferencia que pasa por el punto A1,1 es $P\left(\frac{3}{2},0\right)$.



Gráfica 9. El centro de la circunferencia que es tangente al punto A.

Ahora ya podemos encontrar la pendiente de la recta que pasa por el radio trazado.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{0-1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Ahora para la recta normal al radio aplicamos el principio de perpendicularidad de las rectas

$$m_1 m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Quiere decir que la recta tangente a la curva tiene una pendiente de $\frac{1}{2}$ cuando pasa por el punto A, para obtener la ecuación de la recta podemos utilizar la forma punto pendiente de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

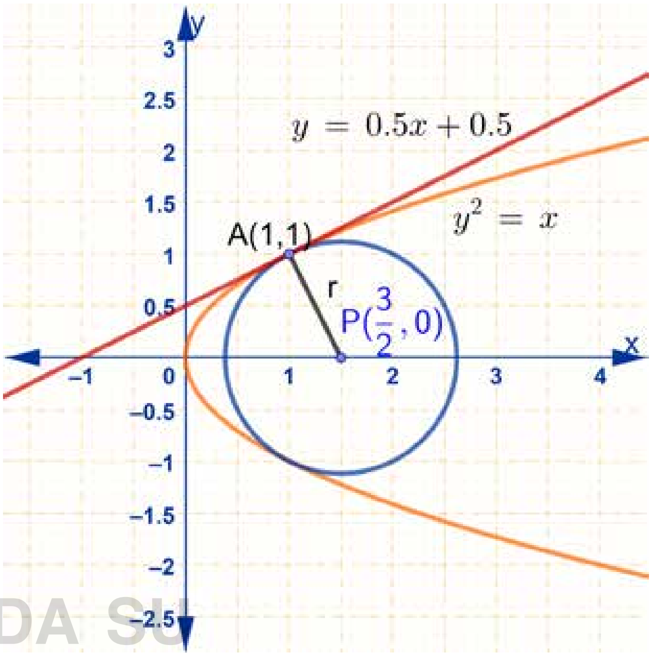
$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1$$

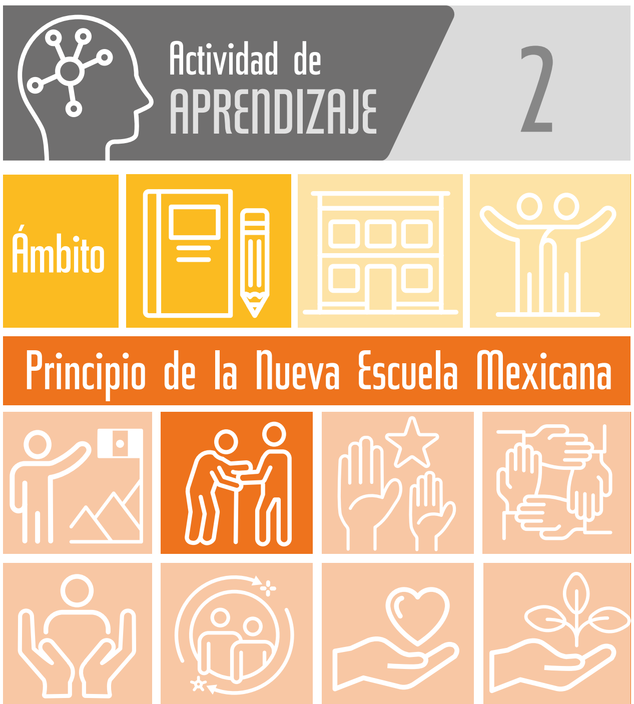
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Por lo que la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2=x$ en el punto A(1,1) es

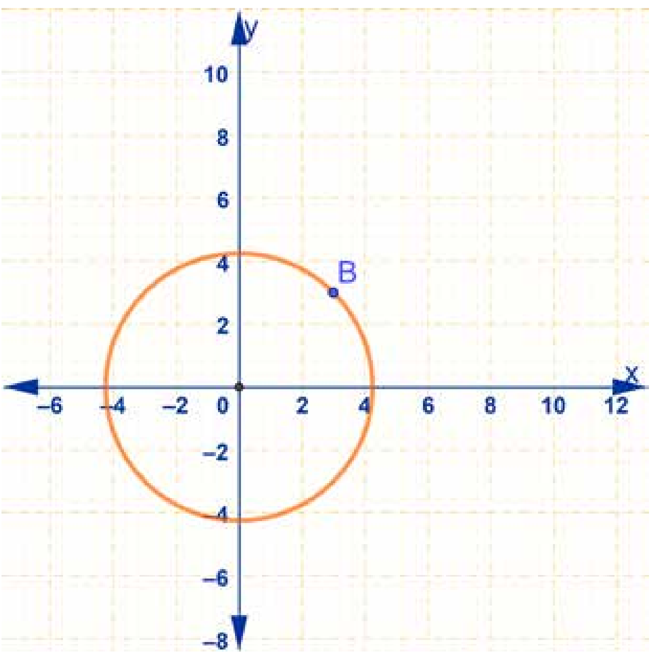
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



Gráfica 10. La recta tangente a la curva.



I. Haciendo uso de tu regla y compás traza una recta tangente a la siguiente circunferencia.



II. Contesta y discute en grupo las siguientes preguntas:

a. ¿Cuáles fueron las contribuciones de los antiguos matemáticos griegos al estudio de las figuras geométricas y las líneas rectas?

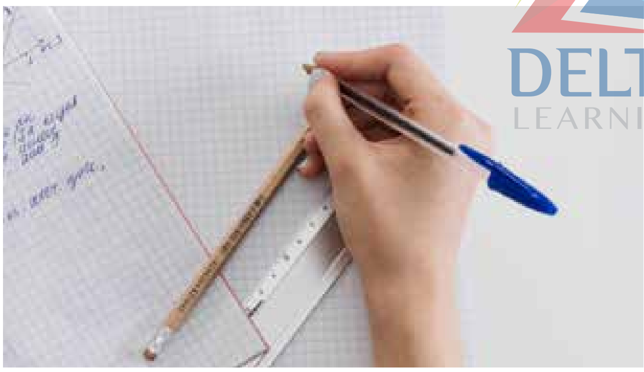
b. ¿Cómo introdujo René Descartes la geometría analítica y qué impacto tuvo en el estudio de las curvas?

c. ¿Cuál fue el papel de Pierre de Fermat en el estudio de la tangencia de las curvas?

d. ¿Cómo formularon Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz los principios del Cálculo Diferencial y qué conceptos introdujeron?

e. ¿Qué contribuciones realizó Leonhard Euler al desarrollo del cálculo y la teoría de funciones?

f. Reflexiona sobre la importancia del problema de la recta tangente en el desarrollo de las matemáticas y su impacto en otras áreas del conocimiento. ¿Por qué crees que este problema ha sido fundamental a lo largo de la historia?



III. Representa gráficamente las siguientes líneas rectas en el plano cartesiano.

a. $y=4x+6$

b. $y=\frac{1}{2}x-2$

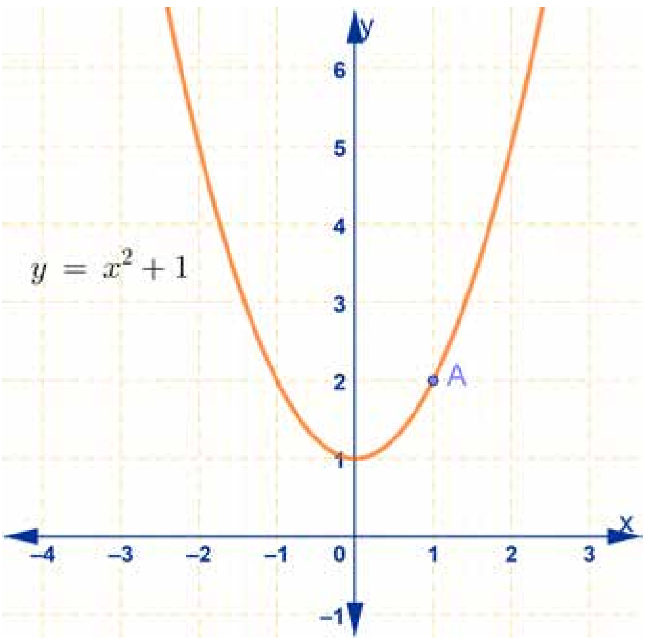
c. $y=-2x+8$

d. $y=6x-1$

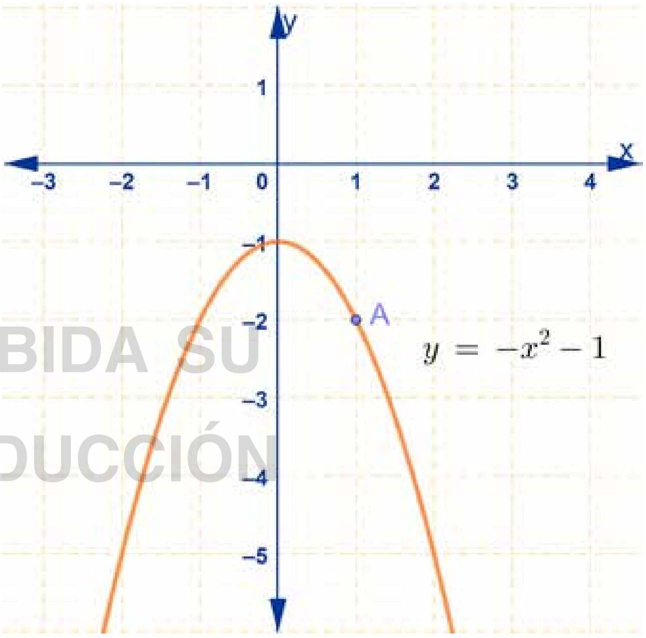
e. $y=-5x+2$

IV. Utilizando el método de Descartes determina las rectas tangentes de las curvas dadas a continuación en el punto indicado.

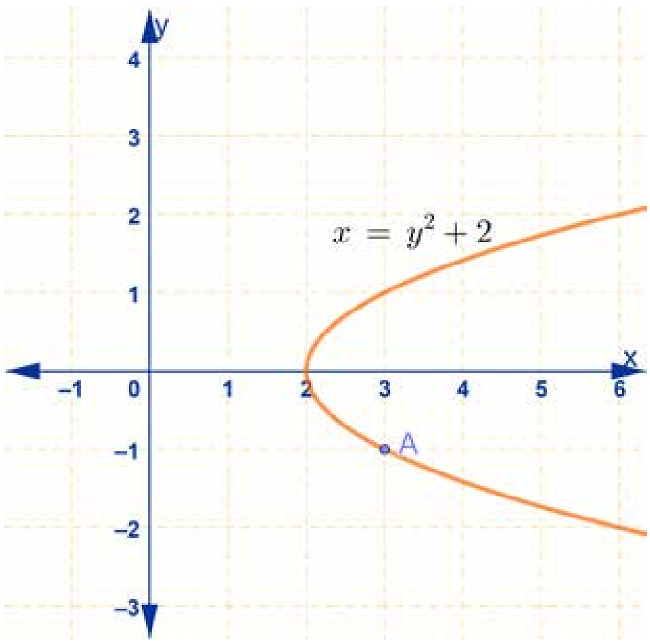
a.



b.



c.



Actividad SOCIOEMOCIONAL

> "Si no controlas tus habilidades emocionales, si no tienes conciencia de ti mismo, si no eres capaz de controlar tus emociones estresantes, si no puedes tener empatía y relaciones efectivas,entonces no importa lo inteligente que seas, no vas a llegar muy lejos".
>
> Daniel Goleman.

La empatía para resolver conflictos

Un conflicto es una situación de tensión entre dos o más personas o grupos que se genera por diferencias de opinión, por intereses opuestos ante algo que comparten o porque la satisfacción de las necesidades de una de las partes atenta contra la de la otra parte.

Los conflictos forman parte de la convivencia, por eso es importante reconocerlos, enfrentarlos, emplear estrategias para resolverlos y aprender de ellos. ¿Crees que la empatía sirva para la resolución de un conflicto?

El reto es identificar las ventajas de resolver un conflicto cuando las personas involucradas muestran empatía y disposición para ayudar.

Actividad 1.

a. En parejas lean el siguiente caso:

Mariana estudia en el Colegio de Bachilleres, acaba de terminar con Paco después de casi un año de ser novios. Paco no está conforme y la sigue buscando a pesar de que ella le ha dicho que sólo lo quiere como amigo.

Un día al salir de clases Mariana se encontró con Aldo, un ex compañero con el que se llevaba bien en la secundaria y que ahora estudia en el CBTIS que está a dos cuadras del Bachilleres. Al encontrarse se saludaron con gusto y se fueron caminando juntos hasta la parada del camión. Un amigo de Paco los vio y corrió a contarle. Al día siguiente Paco y sus amigos salieron apurados hacia la parada del camión a buscar a Aldo, lo golpearon y le advirtieron que si no dejaba de molestar a Mariana le iba a ir peor.

Días después, los amigos de Aldo hicieron lo mismo con Paco y ahora sus amigos están planeando una revancha mayor y están convocando a más compañeros para ir al CBTIS con piedras y palos a buscar a Aldo y a sus amigos.

b. De manera breve, comenten:

1. ¿Qué originó el conflicto?
2. ¿Quién fue empático Paco, Aldo o Mariana?
3. ¿Qué harían en lugar de Paco, Aldo y Mariana?

Actividad 2.

a. En equipos identifiquen los momentos del conflicto en los que una actitud empática y la disposición de ayudar hubiera ayudado a que no escalara a donde llegó.

b. Analicen la forma de actuar de Paco, Aldo y Mariana, y transformen la historia describiendo lo que hubiera sucedido si cada uno hubiera reaccionado con empatía. Anoten en cada cuadro su propuesta:

Paco	Aldo	Mariana

c. Compartan con el grupo su trabajo y comenten la utilidad de la empatía con el reconocimiento, manejo y solución de conflictos.

RESUMEN

Cuando un conflicto escala y pasa de un desacuerdo a una situación en la que se anula la escucha, se imponen necesidades y opiniones, se enfrentan egocentrismos y se trata de vencer al otro a como dé lugar, siempre estará presente una mentalidad auto centrada en ambas partes. En cambio, cuando está presente la disposición para ayudar, una actitud empática centrada en relaciones basadas en el reconocimiento de la igualdad de todas las personas en dignidad y derechos, que a su vez es condición para poder establecer un diálogo que permita la expresión de ideas, necesidades y emociones. Como el diálogo es la herramienta más importante para el manejo de conflictos, la empatía se convierte también en una condición para reconocerlos y buscar acuerdos de solución que consideren el bienestar de ambas partes.

¿QUIERES SABER MÁS?

Revisa el video "Mediación, simios y resolución de conflictos:

https://is.gd/MRAtxB

PARA TU VIDA DIARIA

Si reconoces en este momento algún conflicto con tu familia, con tus amigos o en el salón de clases, dialoga con la otra parte y proponle un ejercicio de empatía para desarrollar una mentalidad centrada en los demás, por ejemplo, compartir algún alimento, dedicar 10 minutos a hablar con otra persona viéndole a los ojos sin distracciones y escuchando con atención o ayudar a alguien que se encuentra en una situación de desventaja.

CONCEPTO CLAVE

Conflicto:
Es una situación que implica una discrepancia entre dos partes que buscan ganar ante el enfrentamiento de sus intereses, creencias, opiniones, ideas y necesidades.