

SERIE  
TLALMANALLI

# TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS II

*Josúe Espinoza Rangel*

NUEVA  
ESCUELA  
MEXICANA





## Temas Selectos de Matemáticas II

Primera edición 2025

ISBN:

D.R. © 2019, Delta Learning®

José Ma. Morelos No.18, Col. Pilares, C.P. 52179, Metepec, Edo. de México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana

Registro número: 4041

Contacto: 800 450 7676

Correo: [contacto@deltalearning.com.mx](mailto:contacto@deltalearning.com.mx)



[deltalearning.com.mx](http://deltalearning.com.mx)

**Todos los derechos reservados.** No se permite la reproducción total o parcial de esta obra, ni su incorporación a un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio (electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros) sin autorización previa y por escrito del titular del copyright. La infracción de dichos derechos puede constituir un delito contra la propiedad intelectual.

**Dirección editorial:** Delta Learning®

**Editor en jefe:** Zito Octavio Alejandro Rosas

**Autor:** Josué Rangel Espinosa

**Correctora:** Perla Vallejo Lucas

**Diseño:** Sandra Ortiz y el equipo de Argonauta Comunicación

**Portada:** Elio Teutli Cortés

**Imágenes:** Freepik y Adobe Stock

**Producción:** Lizbeth López Reyes

### Aviso de exención de responsabilidad:

Los enlaces provistos en este libro no pertenecen a Delta Learning®. Por tanto, no tenemos ningún control sobre la información que los sitios web están dando en un momento determinado y por consiguiente no garantizamos la exactitud de la información proporcionada por terceros (enlaces externos). Aunque esta información se compila con gran cuidado y se actualiza continuamente, no asumimos ninguna responsabilidad de que sea correcta, completa o actualizada.

Los artículos atribuidos a los autores reflejan las opiniones de los mismos y, a menos que se indique específicamente, no representan las opiniones del editor. Además, la reproducción de este libro o cualquier material en cualquiera de los sitios incluidos en este libro no está autorizada, ya que el material puede estar sujeto a derechos de propiedad intelectual.

Los derechos están reservados a sus respectivos propietarios y Delta Learning® no se responsabiliza por nada de lo que se muestra en los enlaces provistos.

**Delta Learning® es una marca registrada propiedad de Delta Learning S.A. de C.V. Prohibida su reproducción total o parcial.**

**Impreso en México**

## Presentación

*Temas Selectos de Matemáticas II* es una propuesta educativa innovadora diseñada para estudiantes de nivel medio superior, alineado cuidadosamente al Marco Curricular Común. Continuando con el éxito del primer volumen, este libro ofrece una exploración profunda y contextualizada de conceptos geométricos fundamentales como el plano cartesiano, las cónicas, los polinomios en dos variables, aplicaciones prácticas de ecuaciones de segundo grado, coordenadas polares, traslaciones y rotaciones.

A lo largo de sus páginas, el lector no solo encontrará una clara exposición teórica, sino también aplicaciones prácticas que vinculan directamente estos conceptos matemáticos con situaciones reales y cotidianas. Al hacerlo, fomenta el desarrollo del pensamiento crítico, creativo e interdisciplinario, esencial para enfrentar los desafíos del mundo contemporáneo.

Los estudiantes tendrán la oportunidad de utilizar herramientas tecnológicas avanzadas como GeoGebra y Tracker para visualizar y resolver problemas reales, potenciando así su capacidad de análisis y comprensión profunda de fenómenos físicos, naturales y tecnológicos. Desde estudiar trayectorias de objetos en movimiento hasta modelar estructuras arquitectónicas mediante ecuaciones geométricas, cada capítulo integra conocimientos que conectan matemáticas, ingeniería, tecnología y ciencias naturales.

El libro se caracteriza por una estructura de progresiones didácticas cuidadosamente elaboradas que facilitan la comprensión gradual y significativa del contenido. Además, se acompaña de ejercicios prácticos, actividades STEAM y proyectos integradores diseñados para que los estudiantes apliquen directamente sus aprendizajes en contextos auténticos y significativos.

*Temas Selectos de Matemáticas II* no es únicamente una continuación del estudio matemático tradicional; es una invitación a descubrir la belleza y utilidad de las matemáticas como herramienta para cambiar nuestra comprensión del mundo y aportar soluciones innovadoras a los retos que enfrentamos como sociedad.



# La Nueva Escuela Mexicana

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) tiene como principio fundamental que la educación sea entendida para toda la vida bajo el concepto de aprender a aprender, con actualización continua, adaptación a los cambios y aprendizaje permanente con el compromiso de brindar calidad en la enseñanza.



En la Editorial Delta Learning tenemos como misión crear materiales educativos de calidad, que cumplan los fundamentos del modelo educativo vigente de la Educación Media Superior, adoptando a la NEM como un eje rector en el diseño de nuestros libros, con el objetivo de promover aprendizajes de excelencia, inclusivos, pluriculturales, colaborativos y equitativos durante la formación de los bachilleres.

Haciendo suyo el reto, la Editorial Delta Learning desarrolla los contenidos de cada uno de sus ejemplares con los siguientes Principios que fundamentan la NEM:



**Fomento de la identidad con México.** El amor a la Patria, el aprecio por su cultura, el conocimiento de su historia y el compromiso con los valores plasmados en la Constitución Política.



**Responsabilidad ciudadana.** El aceptar los derechos y deberes personales y comunes, respetar los valores cívicos como la honestidad, el respeto, la justicia, la solidaridad, la reciprocidad, la lealtad, la libertad, la equidad y la gratitud.



**Honestidad.** Es un compromiso fundamental para cumplir con la responsabilidad social, lo que permite que la sociedad se desarrolle con base en la confianza y en el sustento de la verdad de todas las acciones para permitir una sana relación entre los ciudadanos.



**Participación en la transformación de la sociedad.** El sentido social de la educación implica construir relaciones cercanas, solidarias y fraternas que superen la indiferencia y la apatía para lograr la transformación de la sociedad en conjunto.



**Respeto de la dignidad humana.** El desarrollo integral del individuo promueve el ejercicio pleno y responsable de sus capacidades, el respeto a la dignidad y derechos humanos de las personas es una manera de demostrarlo.



**Promoción de la interculturalidad.** La comprensión y el aprecio por la diversidad cultural y lingüística, por el diálogo e intercambio intercultural sobre una base de equidad y respeto mutuo.



**Promoción de la cultura de paz.** La construcción de un diálogo constructivo, solidario y en búsqueda de acuerdos, permiten una solución no violenta a los conflictos y la convivencia en un marco de respeto a las diferencias.

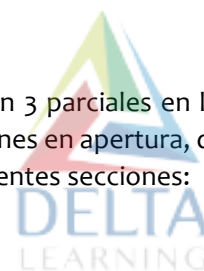


**Respeto por la naturaleza y cuidado del medio ambiente.** El desarrollo de una conciencia ambiental sólida que favorezca la protección y conservación del medio ambiente, propiciando el desarrollo sostenible y reduciendo los efectos del cambio climático.



# Estructura del libro

El presente libro se encuentra estructurado en 3 parciales en los cuales encontrarás desarrolladas las progresiones en apertura, desarrollo y cierre, asimismo cuenta con las siguientes secciones:



**Evaluación diagnóstica:** Esta se realiza al inicio del libro y tiene la finalidad de recuperar los conocimientos y habilidades necesarias para abordar los contenidos específicos de cada una de las progresiones de aprendizaje.



**Actividades de aprendizaje:** En las cuales pondrás a prueba los conocimientos y habilidades desarrollados en cada uno de los temas. Las actividades estarán vinculadas a los **ámbitos** del **Nuevo Modelo Educativo (NME)** de la **Escuela Media Superior (EMS)**, **aula – escuela – comunidad**, así como a alguno de los principios de la **Nueva Escuela Mexicana (NEM)** por ser este un programa de estudios orientado a recuperar el sentido de pertenencia a los valores que te identifican con nuestro país.

En cada actividad de aprendizaje encontrarás un tablero como el que se presenta a la derecha de este párrafo, en el cual podrás identificar a través de sus iconos específicos, tanto los **tres ámbitos del NME de la EMS**, como los **ocho principios de la NEM** a los que corresponda dicha actividad.

A continuación te mostramos las secciones de este tablero así como el significado de cada icono:

En la parte superior del tablero se encuentra una barra gris donde estará indicado el número de actividad.



A continuación verás una barra amarilla donde se indican los tres ámbitos (NME/EMS).



Por último, verás una sección de color naranja donde están indicados los principios de la NEM.





Fomento de la identidad  
con México



Responsabilidad  
ciudadana



Honestidad



Participación en la transformación  
de la sociedad



Respeto de la dignidad  
humana



Promoción de la  
interculturalidad



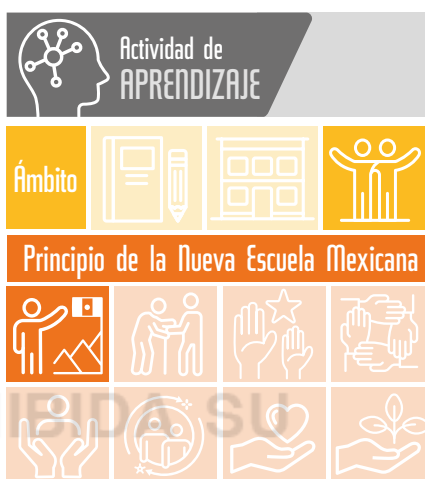
Promoción de la  
cultura de paz



Respeto por la naturaleza y  
cuidado del medio ambiente

Para identificar el ámbito y principio correspondiente a cada actividad verás su respectivo icono en color amarillo y naranja y el resto de los iconos en un tono opaco.

En el ejemplo que ves a la derecha, el **ámbito** corresponde a la categoría **COMUNIDAD** y el **principio de la NEM** corresponde al **Fomento de la identidad con México**.



PROHIBIDA SU  
REPRODUCCIÓN



**Actividades Transversales:** Actividades orientadas a facilitar el proceso de vinculación de los conocimientos y habilidades de los recursos socio-cognitivos con las distintas áreas de conocimiento.



**Actividades QR interactivas:** Actividades que asocian la tecnología con los conocimientos desarrollados en los temas, sólo se escanea el código QR y listo, se pueden reforzar los conocimientos y habilidades.



**Realidad aumentada:** Siempre es importante que todos los sentidos estén inmersos en el proceso de enseñanza – aprendizaje, las actividades de realidad aumentada dan una visión gráfica y vívida de los aprendizajes que se desean desarrollar en el libro.



**Actividades Socioemocionales** El curriculum ampliado no puede faltar dentro del contenido del texto, por ello, se incluyen actividades destinadas a desarrollar habilidades planteadas por los recursos socioemocionales del NME.

Adicionalmente podrás encontrar las siguientes secciones que te permitirán ampliar y afirmar los aprendizajes obtenidos en el curso.



Habilidad  
LECTORA



GLOSARIO



Evaluación  
DEL PARCIAL



BIBLIOGRAFÍA



Proyecto  
Escolar  
Comunitario



Progresión  
1

Cuando visualices el siguiente ícono en alguna de las progresiones de aprendizaje, el código QR que aparezca junto a él tendrá una actividad perteneciente al Programa Aula Escuela Comunidad. Finalmente, te presentamos el ícono que señala el número de progresión al que pertenece cada tema.

## Progresiones

El libro se encuentra apegado al NME de la EMS y desarrolla cada una de las progresiones del programa de **Temas Selectos de Matemáticas II**.

1. Intuye la trayectoria de objetos que se mueven en dos dimensiones y las describe heurísticamente a través del uso de sistemas coordenados cartesianos. De ser posible empleando softwares como Tracker y GeoGebra que le permiten rastrear el movimiento de dichos objetos.
2. Describe algebraicamente algunas trayectorias, lugares geométricos o regiones en el plano empleando ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas o relaciones de distancia y ángulo entre puntos y rectas del plano cartesiano.
3. Deduce propiedades geométricas (simetría, extensión, etc.) de curvas planas, a partir de sus expresiones algebraicas, considerando que polinomios de dos variables con coeficientes reales tienen un conjunto solución que puede graficarse en el plano cartesiano.
4. Emplea métodos gráficos para entender el comportamiento de dos variables que estén en relación de proporcionalidad directa para deducir la ecuación de la recta que pasa por el origen y posteriormente trabajar el caso general de una recta en el plano.
5. Analiza cuerpos en caída libre, tiros parabólicos como los descritos por las balas disparadas por cañones u otros fenómenos que involucren en su modelación funciones cuadráticas para deducir propiedades analíticas de la parábola.
6. Analiza el movimiento circular utilizando la ecuación de la circunferencia, medidas angulares y pensamiento variacional. Se consideran las implicaciones físicas de la conservación del momento angular.
7. Estudia el movimiento planetario utilizando las leyes de Kepler, pensamiento variacional, aspectos analíticos de la elipse y la coplanaridad de cuerpos que se mueven en el espacio.
8. Utiliza las esferas de Dandelin para identificar que las cónicas (incluyendo la hipérbola) se obtienen como el resultado de los cortes de un plano a un cono circular de doble hoja.
9. Considera movimientos del plano y cambios de coordenadas al usar traslaciones y rotaciones con el fin de simplificar la expresión analítica de curvas en el plano.
10. Utiliza coordenadas polares e identidades trigonométricas para lograr una descripción más económica de curvas que de ser descritas cartesianamente tendrían una expresión muy complicada, como, por ejemplo, las espirales, cardioides, entre otras.



# Índice



## PARCIAL 1

- |  | Pág. |
|--|------|
| • Sistema de coordenadas cartesianas           | 13   |
| • Trayectorias, lugares y regiones geométricas | 22   |
| • Propiedades geométricas de curvas planas     | 33   |
| • Ecuación de la recta                         | 40   |

## PARCIAL 2

- |   |    |
|---|----|
| • Caída libre y tiros parabólicos                     | 46 |
| • Ecuación de la circunferencia y movimiento circular | 54 |
| • Movimiento planetario                               | 64 |

## PARCIAL 3

- |   |     |
|---|-----|
| • Las cónicas                                       | 95  |
| • Movimientos del plano y cambio de coordenadas     | 102 |
| • Coordenadas polares e identidades trigonométricas | 107 |





# Evaluación DIAGNÓSTICA

LEARNING

La presente evaluación diagnóstica tiene como finalidad identificar y recuperar los conocimientos y habilidades previas esenciales que poseen los estudiantes para abordar satisfactoriamente los contenidos del libro *Temas Selectos de Matemáticas II*. Los resultados permitirán diseñar estrategias adecuadas para fortalecer aquellos aspectos en los que se detecten dificultades.

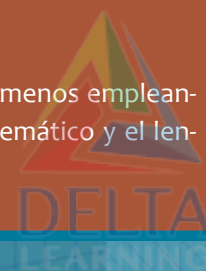
Resuelve los siguientes problemas en hojas aparte, indicando claramente el procedimiento realizado para llegar a la respuesta.

1. Determina la distancia entre los puntos  $A(1,-2)$  y  $B(4,6)$ .
2. Grafica el punto  $C(-3,5)$  y describe en qué cuadrante se encuentra.
3. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por los puntos  $(2,3)$  y  $(-1,-3)$ .
4. Determina si el punto  $P(1,2)$  pertenece a la recta cuya ecuación es  $2x-3y+1=0$ .
5. Calcula el ángulo entre dos rectas cuyas pendientes son  $m_1=1$  y  $m_2=-1$ .
6. Una recta forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $x$  positivo. Determina su pendiente.
7. Resuelve la ecuación  $x^2-5x+6=0$  utilizando factorización.
8. Determina el vértice y el eje de simetría de la parábola definida por  $y=x^2+4x+3$ .
9. Grafica la región solución para la inecuación  $x+y \leq 5$ .
10. Identifica dos puntos que sean solución de la inecuación  $y \geq 2x-1$ .
11. Encuentra las coordenadas del punto simétrico de  $(-2,3)$  respecto al eje  $y$ .
12. Describe brevemente qué transformación geométrica corresponde a la expresión  $(x,y) \rightarrow (x+2,y-3)$ .

Una vez realizada la evaluación, se analizarán los resultados para identificar las fortalezas y áreas de mejora del grupo. Posteriormente, se diseñarán actividades específicas para reforzar los conceptos y habilidades detectadas como puntos débiles.

Este diagnóstico permitirá orientar el proceso educativo durante el semestre, facilitando la adquisición significativa de los aprendizajes propuestos en *Temas Selectos de Matemáticas II*.





### Categorías de aprendizaje:

- C1. Procedural

### Subcategorías:

- S1. Elementos aritméticos - algebraicos
- S2. Elementos geométricos

### Metas de aprendizaje:

- C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.
- C1M2. Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.

### Categorías de aprendizaje:

- C2. Procesos de intuición y razonamiento

### Subcategorías:

- S1. Capacidad para observar y conjeturar
- S2. Pensamiento intuitivo

### Metas de aprendizaje:

- C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- C2M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.

### Categorías de aprendizaje:

- C3. Solución de problemas y modelación

### Subcategorías:

- S2. Construcción de modelos
- S3. Estrategias heurística y ejecución de procedimientos no rutinarios

### Metas de aprendizaje:

- C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.
- C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.

### Categorías de aprendizaje:

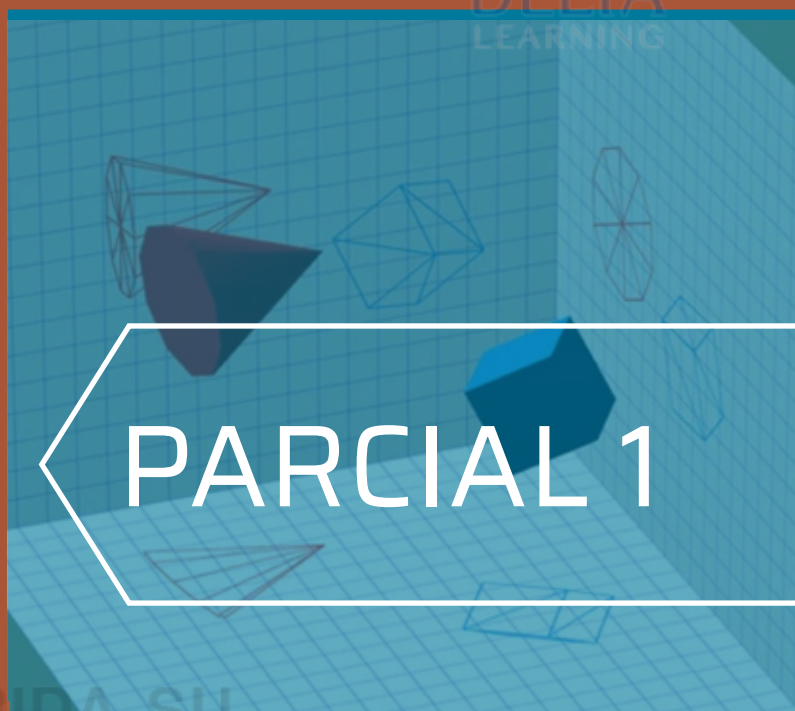
- C4. Interacción y lenguaje matemático

### Subcategorías:

- S1. Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
- S3. Ambiente matemático e comunicación

### Metas de aprendizaje:

- C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.



### Aprendizaje de trayectoria:

1. Aplica procedimientos algorítmicos e interpreta sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
2. Observa, intuye, conjetura y argumenta a favor o en contra de afirmaciones matemáticas tanto teóricas como de aplicación en áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos o recursos socioemocionales, para debatir y contrastar ideas con sus pares.
3. Analiza situaciones y problemas, discerniendo las variables de interés para el estudio, así como también llevando a cabo la verificación requerida de las hipótesis para la aplicación de los objetos, métodos y conceptos matemáticos utilizados, con la finalidad de modelar fenómenos o resolver problemas.
4. Describe, interpreta y comunica con claridad ideas, situaciones y fenómenos propios de la matemática, de las ciencias naturales, experimentales, de la tecnología, de las ciencias sociales y de su entorno, empleando un lenguaje matemático riguroso.

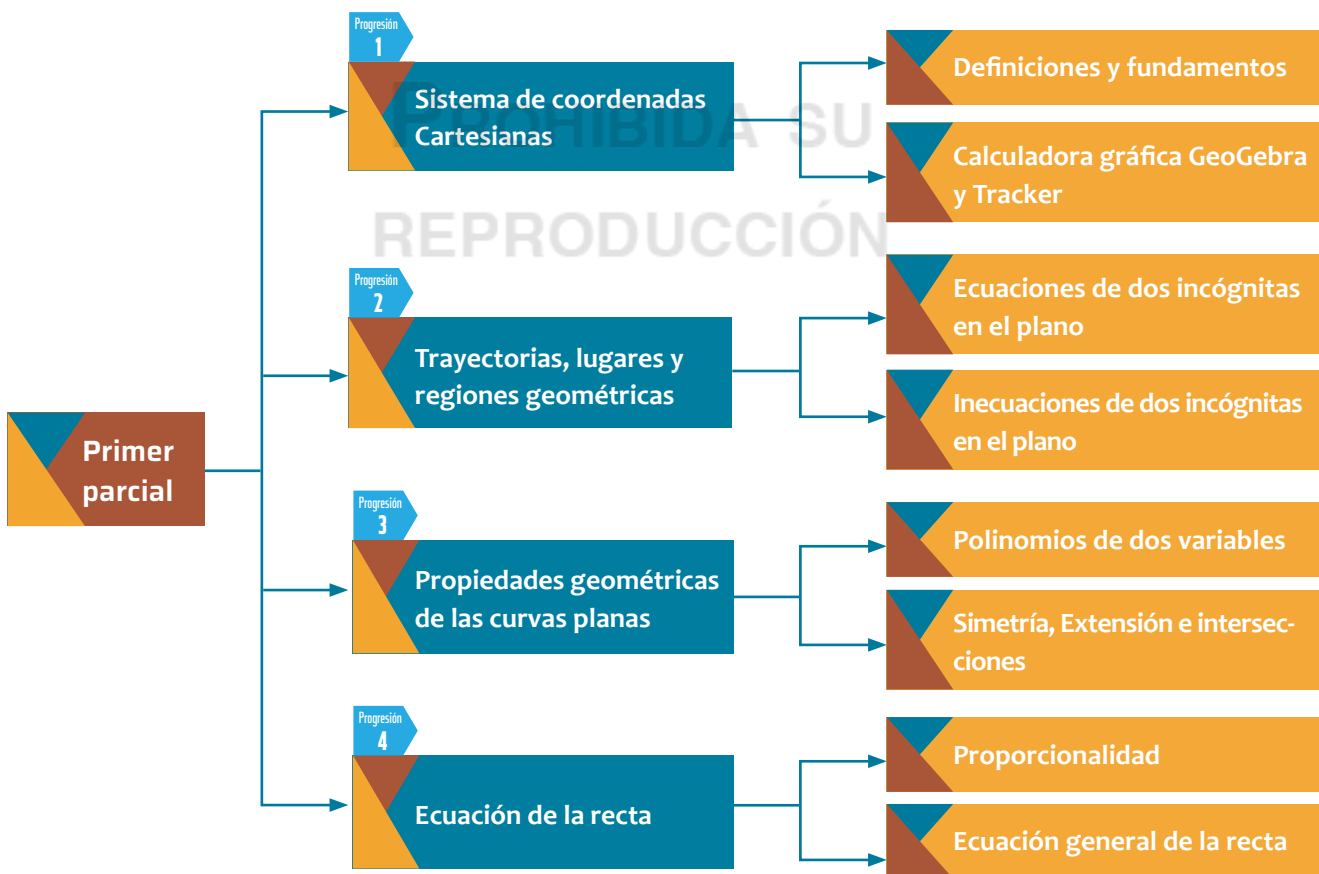


### Progresiones:

1. Intuye la trayectoria de objetos que se mueven en dos dimensiones y las describe heurísticamente a través del uso de sistemas coordenados cartesianos. De ser posible empleando software como Tracker y GeoGebra que le permita rastrear el movimiento de dichos objetos.
2. Describe algebraicamente algunas trayectorias, lugares geométricos o regiones en el plano empleando ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas o relaciones de distancia y ángulo entre puntos y rectas del plano cartesiano.
3. Deduce propiedades geométricas (simetría, extensión, etc.) de curvas planas, a partir de sus expresiones algebraicas, considerando que polinomios de dos variables con coeficientes reales tienen un conjunto solución que puede graficarse en el plano cartesiano.
4. Emplea métodos gráficos para entender el comportamiento de dos variables que estén en relación de proporcionalidad directa para deducir la ecuación de la recta que pasa por el origen y posteriormente trabajar el caso general de una recta en el plano.

## PRESENTACIÓN DEL PRIMER PARCIAL

Durante este primer parcial abordaremos los conceptos esenciales relacionados con la geometría analítica y las herramientas matemáticas que permiten comprender y modelar fenómenos del entorno cotidiano. A continuación, se presentan los temas que serán desarrollados:



Este parcial integra actividades prácticas con el uso de software educativo, lo que permitirá una comprensión profunda y significativa de los contenidos. Cada tema incluye ejercicios prácticos y estudios de caso que vinculan directamente la teoría con aplicaciones reales y contextos específicos.



Progresión  
1

## Sistema de coordenadas cartesianas

Estudiar cómo se mueve un objeto te ayuda a entender mejor los fenómenos que observamos en la naturaleza y en la tecnología. En Temas Selectos de Matemáticas II veremos de forma práctica cómo describir y analizar el movimiento en dos dimensiones usando el sistema de coordenadas cartesianas. Con herramientas interactivas como Tracker y GeoGebra, tendrás la oportunidad de observar, registrar y analizar los patrones de movimiento, haciendo conjeturas y relacionando lo que ves en la gráfica con tu intuición matemática. Esta experiencia no solo fortalecerá tu capacidad de análisis y razonamiento, sino que también te permitirá ver de manera más clara cómo se conecta la matemática con el mundo físico que te rodea.



### Principio de la Nueva Escuela Mexicana



Observa detenidamente el movimiento de un objeto, como el de una pelota al ser lanzada, la caída libre de un objeto, el vuelo de un ave o una mariposa, y registra tus impresiones. Observa dónde inicia el movimiento, identifica el punto en que alcanza su altura máxima y observa el lugar donde aterriza. Imagina que cada uno de estos puntos se puede ubicar en un papel cuadrículado mediante un sistema de coordenadas, donde el origen (0,0) te ayudará a ubicar cada posición en el plano. Ahora, con lápiz y papel cuadrículado, dibuja tu propio sistema de coordenadas y asigna de manera estimada las posiciones que has observado en el movimiento del objeto. Une los puntos que identificaste para formar la trayectoria, y reflexiona: ¿cómo se ve la curva que obtuviste? y ¿qué te dice esta representación acerca del movimiento que observaste?

Con estas preguntas en mente, analiza la importancia de plasmar gráficamente un movimiento para comprender mejor su comportamiento.

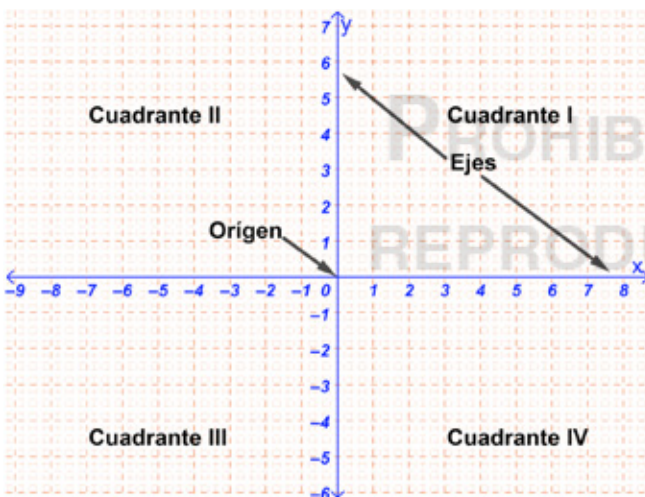
## Definiciones y fundamentos



Un sistema de coordenadas cartesianas permite representar la posición de un objeto en un espacio bidimensional mediante pares ordenados  $(x, y)$ . Este sistema es clave para modelar trayectorias en el estudio del movimiento.

Antes de adentrarnos en el análisis de las trayectorias, es fundamental asentar algunas definiciones y conceptos que servirán como cimiento de nuestro aprendizaje:

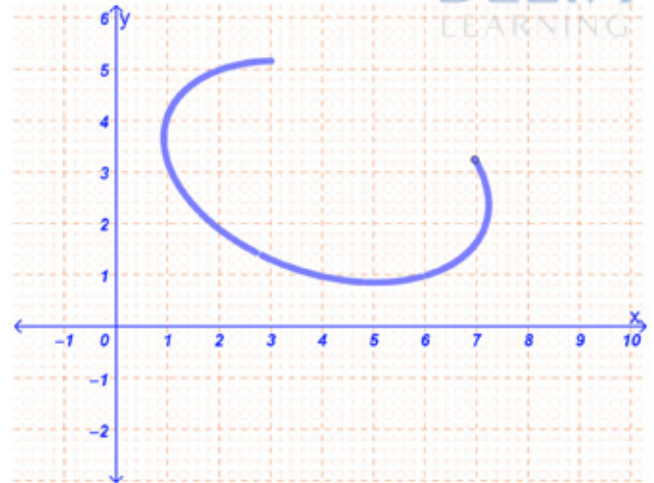
- **Sistema de Coordenadas Cartesianas:** es un marco de referencia formado por dos ejes perpendiculares, denominados eje  $x$  y eje  $y$ , que permiten ubicar de manera única cualquier punto en el plano mediante un par de números. Los ejes forman entre sí cuatro cuadrantes numerados en sentido antihorario.
- **Origen:** el punto de intersección de los ejes, que se designa como  $(0,0)$  y sirve como referencia para medir distancias y direcciones.



Gráfica 1. Sistema de coordenadas cartesianas

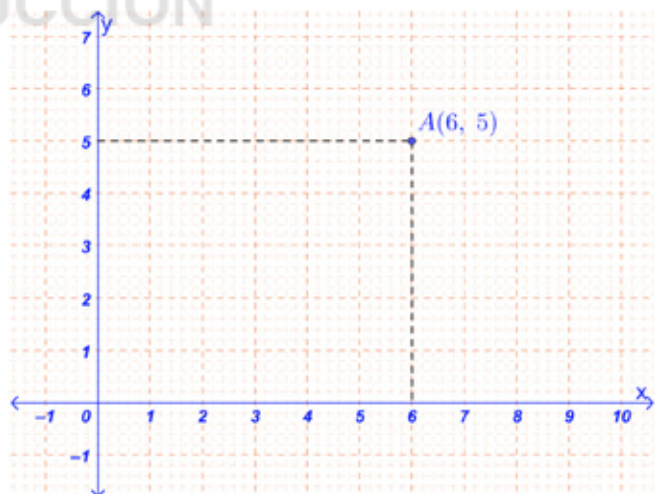


- **Trayectoria:** es el recorrido que sigue un objeto al moverse en el espacio, el cual puede ser representado y analizado mediante coordenadas cartesianas.



Gráfica 2. Trayectoria de un punto en el plano cartesiano

- **Ubicación de pares ordenados:** un par ordenado  $(x, y)$  se ubica en el plano mediante puntos, los cuales se nombran con una letra mayúscula acompañado de la coordenada y para ubicarlos se realiza como en la siguiente gráfica.

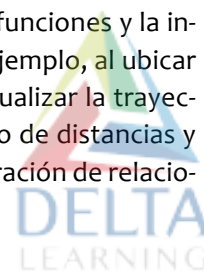


Gráfica 3. Ubicación de un punto en el plano cartesiano

- **Intuición Matemática y Razonamiento Heurístico:** se refieren a la capacidad de observar, inferir y formular conjeturas sobre patrones y comportamientos.



El sistema de coordenadas es esencial para la representación gráfica de funciones y la interpretación de datos en contextos tanto teóricos como prácticos. Por ejemplo, al ubicar puntos en el plano, se puede determinar la pendiente de una recta o visualizar la trayectoria de un objeto en movimiento. Este enfoque no solo facilita el cálculo de distancias y ángulos mediante fórmulas derivadas, sino que también permite la exploración de relaciones entre variables en situaciones reales.



En la práctica, el dominio del sistema cartesiano abre el camino para el uso de herramientas digitales y métodos analíticos, impulsando el razonamiento y la capacidad de formular conjeturas fundamentadas sobre el comportamiento de fenómenos geométricos y físicos.

### Ejercicio 1: Ubicación de puntos en el plano

Imagina que se te proporcionan los siguientes puntos: A (3, 2), B (-4, 5), C (-2, -3) y D (6, -1). Tu tarea es dibujar un plano cartesiano en el recuadro, marcando claramente el origen y los ejes x e y. Posteriormente, ubica cada uno de estos puntos en el plano y determina en qué cuadrante se encuentra cada uno. Reflexiona sobre cómo el signo de las coordenadas te ayuda a identificar el cuadrante correspondiente y registra tus observaciones.

---

---

---

### Ejercicio 2: Trazado de una trayectoria

Se te proporciona la siguiente serie de puntos que corresponden a la trayectoria de un objeto en movimiento: P (-3, 1), Q (-1, 3), R (2, 4), S (4, 2) y T (3, -1). Dibuja el plano cartesiano y ubica cada uno de estos puntos. Une los puntos en el orden indicado (de P a T) para formar la trayectoria del objeto. Analiza la forma de la curva resultante y responde: ¿Qué patrones observas en el cambio de dirección? ¿Cómo se relaciona la forma de la trayectoria con el movimiento del objeto?

---

---

---

## Calculadora gráfica GeoGebra y Tracker

GeoGebra y Tracker son dos herramientas digitales que potenciarán tu aprendizaje en matemáticas. GeoGebra es un software interactivo gratuito que integra geometría, álgebra y cálculo, permitiéndote construir y analizar gráficos, funciones y figuras de manera dinámica. Su interfaz intuitiva te facilita visualizar conceptos abstractos, realizar conjeturas y verificar resultados, lo que lo convierte en un recurso esencial para explorar y comprender las relaciones matemáticas en el plano. Puedes acceder al contenido en el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/>.

Por otro lado, Tracker es una aplicación diseñada para el análisis de movimiento a través de videos, permitiéndote rastrear y estudiar la trayectoria de objetos en dos dimensiones. Esta herramienta te ayuda a conectar la teoría con la práctica, facilitando la medición y la representación gráfica de fenómenos físicos en tiempo real. Puedes descargar la aplicación en el siguiente enlace: <https://opensourcephysics.github.io/tracker-website/>.

(En el siguiente enlace podrás encontrar un ejemplo de la utilidad de este genial software gratuito: <https://youtu.be/MSoW2ylhqiQ>).

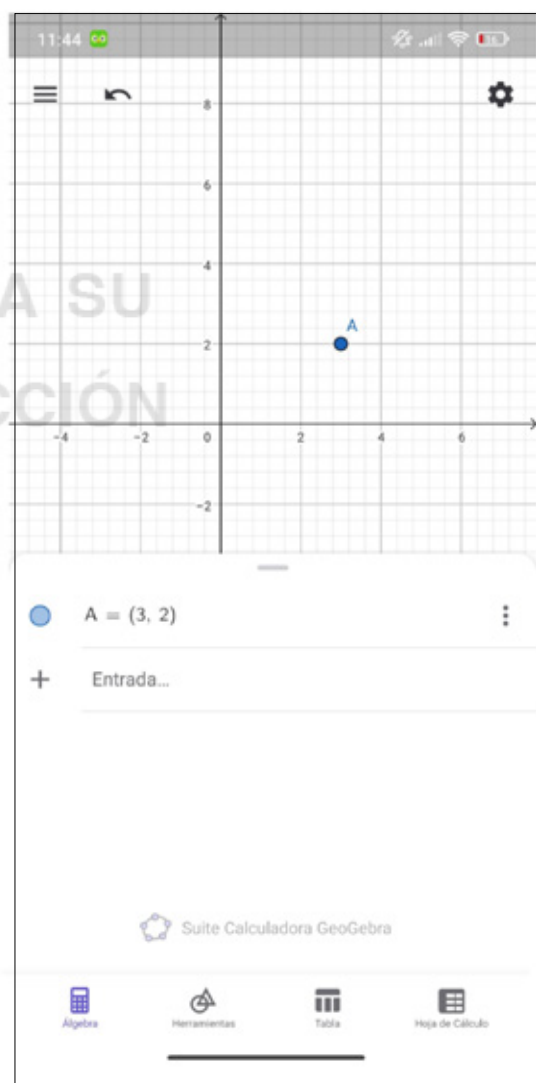
La integración de GeoGebra y Tracker no solo refuerza tu intuición matemática, sino que también te permite experimentar de forma interactiva y visual, haciendo que el aprendizaje sea más ameno y profundo.

### GeoGebra como herramienta de graficación

El uso de GeoGebra para trabajar con el plano cartesiano y la ubicación de puntos te ofrece una herramienta dinámica y visual que facilita la comprensión de conceptos abstractos. Para comenzar, abre GeoGebra y selecciona la vista “Graficación”, donde verás un plano cartesiano ya configurado. En este entorno, cada punto que ubiques se representa tanto en el gráfico como en la lista algebraica, permitiéndote ver de forma inmediata cómo cambian sus coordenadas. La interfaz te permite agregar puntos mediante comandos o de manera interactiva haciendo clic en el plano; por ejemplo, al escribir el comando  $A = (3, 2)$  en la barra de entrada, el punto A se ubica automáticamente en el lugar correspondiente, mostrando su posición exacta en el plano.



Gráfica 4. Interfaz de GeoGebra en PC



Gráfica 5. Visualización de GeoGebra desde un dispositivo móvil

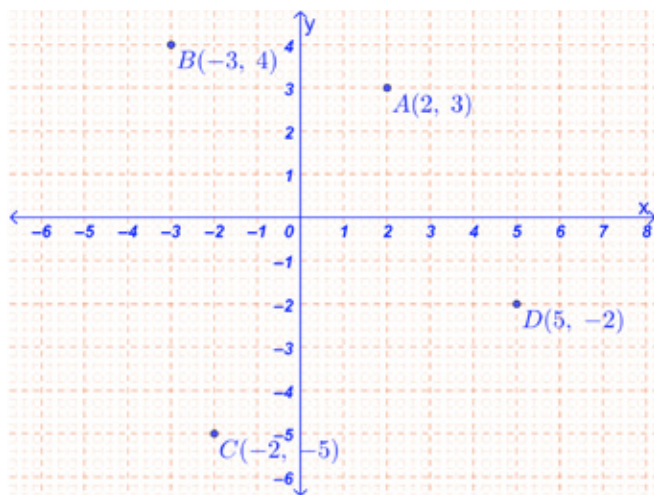
Esta funcionalidad es especialmente útil para practicar la ubicación de puntos en diferentes cuadrantes y para visualizar la relación entre las coordenadas y la posición espacial. Además, GeoGebra posibilita la modificación en tiempo real de los puntos y la generación de trayectorias al unir varios de ellos, lo que permite experimentar con diferentes configuraciones y observar cómo se transforman las representaciones gráficas.

**Ejercicio 1. Ubicación y clasificación de puntos:** crea un nuevo proyecto en GeoGebra y, utilizando la barra de entrada, introduce los siguientes puntos:

- $A = (2, 3)$
- $B = (-3, 4)$
- $C = (-2, -5)$
- $D = (5, -2)$

Una vez ubicados los puntos en el plano, observa que cada uno se posiciona en función del signo de sus coordenadas:

- El punto  $A(2, 3)$  tiene ambas coordenadas positivas, por lo que se encuentra en el **primer cuadrante**.
- El punto  $B(-3, 4)$  presenta una coordenada  $x$  negativa y una  $y$  positiva, ubicándose en el **segundo cuadrante**.
- El punto  $C(-2, -5)$  tiene tanto  $x$  como  $y$  negativas, lo que lo coloca en el **tercer cuadrante**.
- El punto  $D(5, -2)$  muestra una  $x$  positiva y una  $y$  negativa, por lo que se sitúa en el **cuarto cuadrante**.



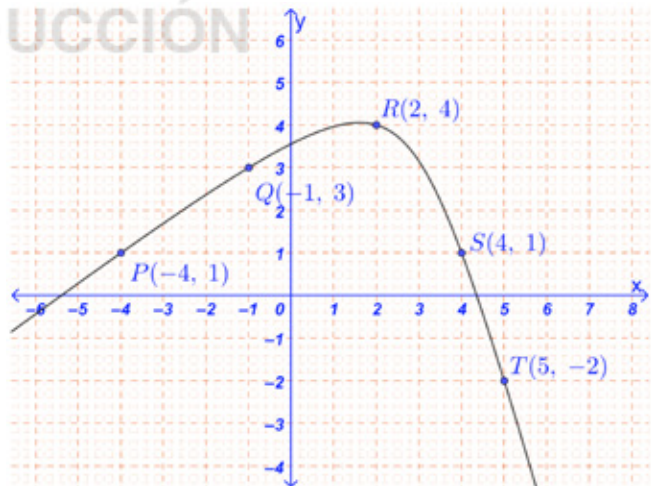
Gráfica 6. Ubicación de los puntos en GeoGebra

Reflexiona sobre cómo el signo de cada coordenada determina la ubicación de los puntos, donde los valores positivos o negativos en  $x$  e  $y$  indican hacia qué dirección del origen se encuentra el punto, facilitando la clasificación en cuadrantes. Además, al modificar las coordenadas de cada punto en tiempo real, podrás observar cómo cambia su posición en el plano, lo que refuerza el entendimiento de la relación entre las coordenadas y la ubicación espacial.

**Ejercicio 2. Construcción de trayectorias:** para simular la trayectoria de un objeto en movimiento, define en GeoGebra la siguiente serie de puntos:

- $P = (-4, 1)$
- $Q = (-1, 3)$
- $R = (2, 4)$
- $S = (4, 1)$
- $T = (5, -2)$

Una vez que hayas ubicado estos puntos en el plano, utiliza la herramienta cónica que pasa por cinco puntos siguiendo el orden dado (de  $P$  a  $T$ ). Observa la forma resultante: notarás que la trayectoria tiene una forma curva que simula un movimiento ascendente, seguido de un descenso.



Gráfica 7. Trayectoria que pasa por cinco puntos

Analiza cómo varían las coordenadas a lo largo del recorrido. Desde  $P$ , con un valor bajo en  $x$  y una  $y$  moderada, hasta  $R$ , donde la  $x$  es mayor y la  $y$  alcanza su valor máximo, finalmente desciende hasta  $T$ . Esta variación evidencia el cambio en la dirección y la velocidad



del objeto. Reflexiona sobre la relación entre la forma de la trayectoria y los cambios en las coordenadas, lo que te ayudará a visualizar cómo las ecuaciones matemáticas pueden modelar el movimiento real.

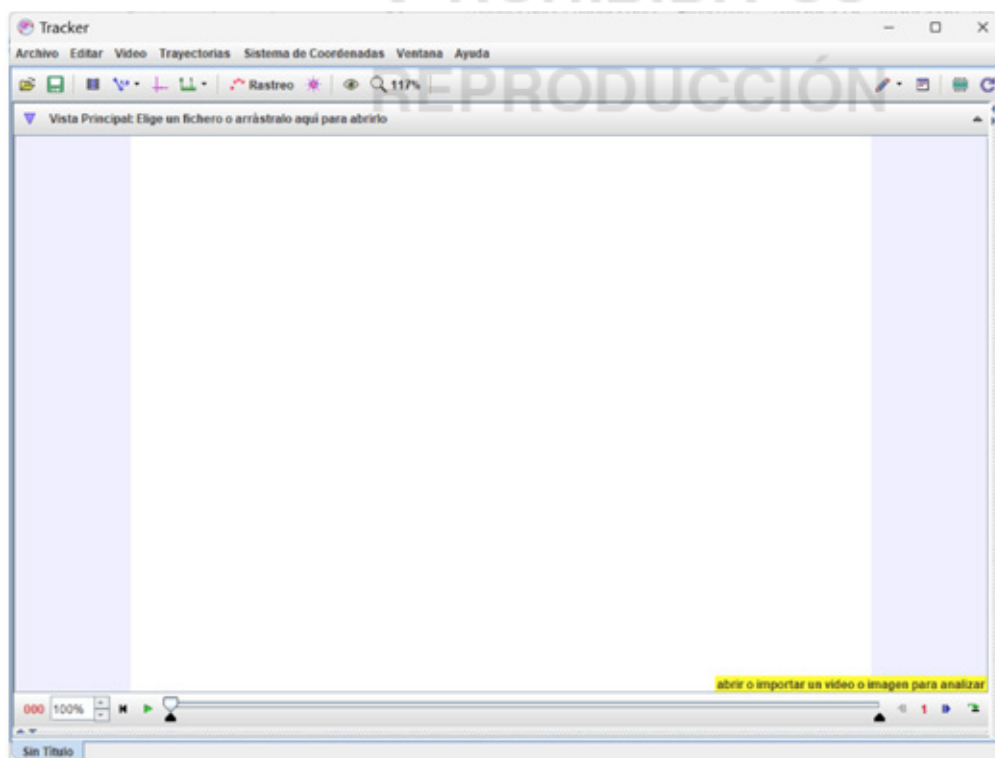


### Rastreo de trayectorias con Tracker

Tracker es una herramienta de análisis de movimiento en video diseñada para el estudio experimental de trayectorias y fenómenos físicos. Se trata de un software gratuito que permite importar videos, marcar puntos de interés en cada cuadro, calibrar la escala y seguir la posición de un objeto a lo largo del tiempo. Esto posibilita transformar un video en datos cuantitativos que se pueden analizar para obtener información sobre velocidades, aceleraciones y la forma de la trayectoria.

Tracker se puede descargar de manera gratuita desde la página oficial del proyecto, generalmente en <https://opensourcephysics.github.io/tracker-website/>. La instalación es sencilla y está disponible para sistemas operativos Windows, MacOS y Linux. También puedes trabajar con una versión en línea en el siguiente enlace: <https://opensourcephysics.github.io/tracker-online/>.

Una vez descargado e instalado, al abrir el programa te encontrarás con una interfaz que combina una ventana para visualizar el video y paneles para introducir comandos y visualizar los datos obtenidos.



Gráfica 8. Interfaz de Tracker 6.3.0

### Uso básico de Tracker:

Para comenzar a utilizar Tracker, sigue estos pasos:

- Importar el video: abre Tracker y selecciona "Archivo > Abrir" para cargar el video que desees analizar.
- Calibrar la escala: es fundamental establecer una referencia de longitud en el video. Utiliza una regla o un objeto de tamaño conocido para calibrar el video, definiendo así las unidades de medida.
- Marcar y rastrear el objeto: selecciona la herramienta de "seguimiento" y marca el objeto en el primer cuadro. Tracker permite que el software detecte automáticamente el objeto en cuadros sucesivos o que se realice un seguimiento manual.
- Generar datos: a medida que el objeto es rastreado, Tracker registra las coordenadas (x,y) en función del tiempo, generando una tabla de datos y permitiendo la visualización de la trayectoria en un gráfico.
- Análisis de resultados: con los datos obtenidos, puedes analizar parámetros como la velocidad, la aceleración y la forma de la trayectoria, comparándolos con modelos teóricos.

En el siguiente enlace podrás apreciar un ejercicio en el que se utiliza Tracker para seguir una trayectoria parabólica.



<https://is.gd/BEK0OL>

El uso de Tracker es fundamental en el aprendizaje experimental, ya que conecta la teoría con la práctica de manera visual y cuantitativa. Al permitirte rastrear trayectorias reales, este software favorece el desarrollo de una intuición matemática y física, facilitando la comprensión de conceptos abstractos a través de datos concretos. Además, el análisis interactivo que ofrece Tracker potencia el aprendizaje autónomo, la formulación de hipótesis y la verificación de modelos teóricos, convirtiéndolo en una herramienta invaluable para estudiantes y educadores en el campo de las ciencias y la tecnología.

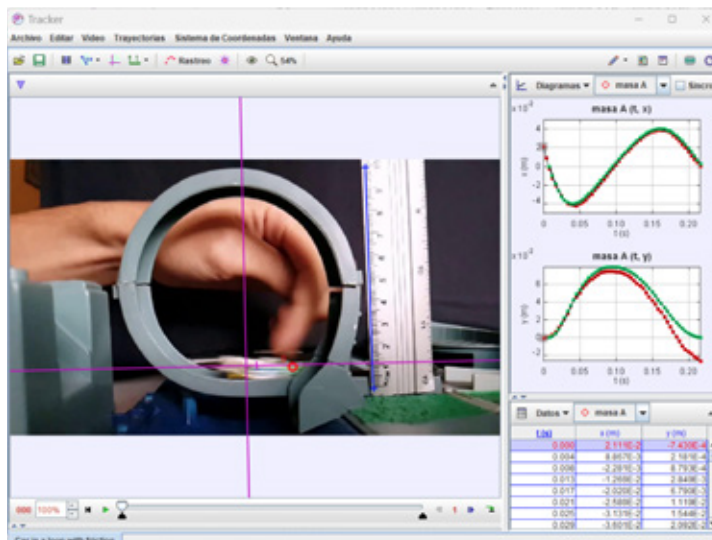
### Ejercicio

A continuación, analizaremos el movimiento de un auto de juguete dentro de una pista de carreras, para ello accederemos a la biblioteca de Tracker donde encontrarás una amplia variedad de experimentos, accede al enlace que se encuentra en la parte inferior izquierda de esta página y descarga el archivo con extensión **.trz**, una vez descargado, abre Tracker y sigue la ruta *Archivo>Abrir>Selector de archivos* y selecciona el archivo que acabas de descargar, al abrirlo ya tendrás toda la configuración necesaria para hacer el análisis del movimiento.



<https://is.gd/FyDHeE>

Gráfica 9.  
Experimento  
para el análisis  
de movimiento  
en Tracker



Da clic en el botón verde de reproducir y observa como a través de los planos cartesianos se generan los puntos del movimiento descritos en el video, donde se aprecian las variaciones en el eje x y el eje y respectivamente con respecto al tiempo.



Ahora que has visto el experimento reflexiona con las siguientes preguntas:

¿Qué ventajas observas al utilizar un sistema de coordenadas cartesianas para representar el movimiento del auto en el video?

---



---

¿Cómo se relacionan las variaciones en el eje x y en el eje y con la trayectoria completa del auto?

---



---

Al reproducir el experimento, ¿qué patrones o tendencias identificas en la trayectoria y cómo se reflejan en los cambios de las coordenadas a lo largo del tiempo?

---



---

¿Cómo podrías utilizar la información de las gráficas generadas para predecir el comportamiento del auto en diferentes partes de la pista o para identificar posibles fuentes de error en el experimento?

---



---

PROHIBIDA SU

CIERRE

Actividad de  
**APRENDIZAJE**

2

Principio de la Nueva Escuela Mexicana


Ámbito

--	--	--

**I. A continuación, te propongo cinco ejercicios para que pongas en práctica el uso de GeoGebra en la ubicación de puntos y la generación de trayectorias, trabaja en tu teléfono o PC, imprime tus resultados y entrégalos a tu docente para su revisión.**

- Crea los siguientes puntos en GeoGebra: A 3, 4, B -2, 5, C -4, -3, D 5, -2, E 12, -1.3, F -3, 2, G 2, 0, H 0,  $\pi$ , I 2.5, -4.75, J -1, -2, K 3, -3, L -2, -4, M 5, 1, N 1, 5, O -4, 2, P 0, -3, Q 4, 3, R -3, -1, S  $\varphi$ , 2.5, T (-e, 0). Ubícalos en el plano cartesiano y, a partir de sus coordenadas, identifica en qué cuadrante se encuentra cada uno. Reflexiona sobre cómo el signo de cada coordenada determina la posición del punto.
- Define los puntos E (-3, -1), F(0, 2) y G (4, 3) en GeoGebra. Une estos puntos utilizando la herramienta de “polilínea” para formar una trayectoria. Observa cómo se relacionan los puntos entre sí y determina si la trayectoria es lineal o si presenta algún cambio en la dirección.

- c. Grafica la función  $f(x) = 2x + 1$  en GeoGebra y coloca algunos puntos sobre la recta (por ejemplo, para  $x = -2, 0, 3$ ). Comprueba que las coordenadas de los puntos ubicados satisfacen la ecuación de la función, reforzando la relación entre la representación algebraica y la gráfica.
- d. Imagina que el movimiento de un objeto se describe mediante la función cuadrática  $g(x) = -0.5x^2 + 2x + 1$ . Utilizando GeoGebra, grafica la función y elige al menos cinco puntos a lo largo de la trayectoria. Luego, une estos puntos para visualizar la curva y discute cómo varían las coordenadas en el trayecto, relacionando la forma de la parábola con los cambios en la posición del objeto.
- e. Dibuja una Casa en GeoGebra. Define los puntos que serán las esquinas de la base de la casa. Por ejemplo, ubica A (1, 1), B (5, 1), C (5, 4) y D (1, 4). Conecta los puntos A, B, C y D en ese orden utilizando la herramienta de segmento o polilínea para formar el rectángulo base de la casa. Ubica un punto E en la parte superior, que será el vértice del techo, por ejemplo E (3, 6). Une el punto E con los puntos C y D para formar el techo triangular. Puedes añadir otros elementos, como una puerta o ventanas.

Por ejemplo, ubica los puntos F (2, 1) y G (2, 3) para formar una línea vertical que simule una puerta, y conecta F y G. Agrega puntos para ventanas, como H (4, 2) y I (4, 3), dibuja un pequeño rectángulo o cuadrado. Experimenta moviendo algunos puntos para ver cómo se transforma el dibujo. Usa las herramientas de GeoGebra para cambiar colores o estilos de líneas y hacer el dibujo más atractivo.

**II. En los siguientes ejercicios podrás explorar el software Tracker, revisa el manual de esta herramienta en el siguiente enlace en caso de que tengas dudas de cómo usarlo: [https://physlets.org/tracker/tracker\\_help\\_es.pdf](https://physlets.org/tracker/tracker_help_es.pdf)**

- a. Ingresa a la biblioteca de Tracker y selecciona al menos dos videos que te resulten interesantes. Descarga ambos archivos. trz, los cuales ya contienen la configuración necesaria para rastrear el movimiento. Abre el primer archivo en Tracker mediante Archivo > Abrir > Selector de archivos. Observa cómo se ha configurado el sistema de coordenadas, la escala y el seguimiento del objeto. Reproduce el video y sigue la trayectoria trazada por el objeto. Toma nota de la forma de la trayectoria, de cómo varían las coordenadas en los ejes x e y, y de los ajustes realizados para compensar factores como la fricción o la aceleración. Repite el proceso con el segundo video, comparando la naturaleza del movimiento (por ejemplo, movimiento parabólico frente a movimiento circular) y cómo cada uno se refleja en las gráficas generadas. Contesta las siguientes preguntas:

¿Qué parámetros (como la calibración de escala, selección del objeto y suavizado de datos) consideras cruciales para obtener un análisis preciso?

---



---

¿Qué observaciones puedes hacer sobre las gráficas de posición versus tiempo para ambos experimentos?

---



---

- b. Graba o selecciona un video de un proyectil (por ejemplo, una pelota lanzada) donde se vea claramente el trayecto completo. Abre Tracker y carga el video mediante Archivo >



Abrir. Calibra la escala utilizando un objeto de referencia presente en la escena. Marca el objeto en cada cuadro para trazar su trayectoria. Extrae la gráfica de posición vs. tiempo en los ejes  $x$  e  $y$ ; analiza cómo la gravedad afecta el movimiento. Reflexiona sobre la simetría de la trayectoria y determina la velocidad y la aceleración en diferentes puntos del recorrido.

- c. Graba un video donde se muestre un objeto (por ejemplo, un carrito) deslizándose por un plano inclinado. Abre Tracker y carga el video, luego calibra la escala usando un elemento de referencia. Utiliza la herramienta de seguimiento para marcar el objeto a lo largo del plano inclinado. Observa la variación de la velocidad a lo largo de la rampa y extrae una gráfica de posición y velocidad vs. tiempo. Identifica si el movimiento es uniforme o si presenta aceleración y, en caso afirmativo, calcula su valor aproximado.
- d. Selecciona un video que muestre el movimiento de un objeto en una trayectoria circular o vibratoria (por ejemplo, un disco girando o un péndulo).

Abre Tracker, importa el video y calibra la escala utilizando una referencia conocida. Marca el objeto en cada cuadro y observa cómo se comportan las coordenadas a lo largo del tiempo. Extrae la gráfica del movimiento en los ejes  $y$ , de ser posible, utiliza las herramientas de análisis para determinar la aceleración centrípeta. Discute cómo el cambio en la dirección del movimiento se relaciona con las fuerzas presentes en el sistema.



## Actividad SOCIOEMOCIONAL

### La inmediatez de las decisiones

“Lo que causa malestar es estar en el presente queriendo estar en el futuro”.

Eckart Tolle

Amanda llegó al examen de Matemáticas. No había estudiado mucho y casualmente, el maestro propuso al grupo hacer el examen ese día o la semana entrante. Se hizo una votación que se definiría con el voto de Amanda quien, con tal de calmar lo más rápido posible su nerviosismo, eligió que se aplicara en ese momento. Lamentablemente, reprobó el examen y se arrepintió por no haber pedido que se aplazara.

¿Alguna vez tu necesidad de resolver algo de manera inmediata te ha llevado a tomar una decisión apresurada que no te benefició?

El reto es examinar de qué manera las emociones, el contexto, los amigos, las experiencias previas y la sensibilidad a la inmediatez pueden favorecer u obstaculizar la toma responsable de decisiones.

#### Actividad 1.

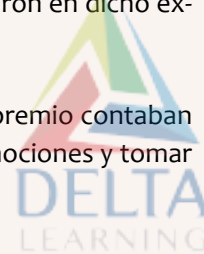
##### a. En parejas, lean y respondan.

En los años 60 y 70 del siglo pasado, en la Universidad de Stanford se llevó a cabo un experimento para medir la sensibilidad a la inmediatez que tenían un grupo de niños.

La prueba se llamó de los “marshmallows” (malvaviscos) y consistió en dejar a un niño solo en un cuarto, sentado frente a un dulce. Al infante se le advertía que, si esperaba 15 minutos, podría comerse ese dulce más otro. Pero si no esperaba el tiempo suficiente, sólo podría comerse el que tenía enfrente. Durante el experimento, se grababa a los niños y se podía observar su lucha interna entre lograr una gratificación mayor.

Treinta años después, se hizo un seguimiento de los niños que participaron en dicho experimento.

Se constató que aquellos que lograron esperar y disfrutar de su doble premio contaban con más fuerza de voluntad y con mejores recursos para regular sus emociones y tomar mejores decisiones, lo que les ayudó a vivir una vida más plena.



- ¿Por qué creen que los niños que decidían esperar, tuvieron una vida más satisfactoria?

- ¿Qué beneficios tiene reflexionar antes de tomar decisiones?

### CONCEPTO CLAVE

#### Sensibilidad a la inmediatez:

Se refiere al grado de propensión que tiene una persona de querer una gratificación inmediata cuando lleva a cabo una acción.

### ¿QUIERES SABER MÁS?

Puedes leer el artículo La cultura de la inmediatez que profundiza en cómo la necesidad de obtener una respuesta o una gratificación inmediata obstaculiza la toma reflexiva de decisiones.

Puedes encontrar la nota en: <https://www.elcato.org/la-cultura-de-la-inmediatez>

### PARA TU VIDA DIARIA

Utiliza autorregistros para diferentes conductas que te gustaría modificar, de esa manera entenderás qué es lo que las activa, y podrás notar los avances después de aplicar las técnicas de modificación de conducta. Cuando logres cambiar aquello que no te gusta, comparte la técnica y tus resultados.

### Actividad 2.

#### a. De forma individual, responde.

- Describe una situación en que tu necesidad de resolver algo de forma inmediata te haya llevado a tomar una decisión poco responsable para tu persona o hacia los demás.

- ¿Qué consecuencias hubo de tu comportamiento?

- En tu opinión, la sensibilidad a la inmediatez ¿favorece u obstaculiza la toma responsable de decisiones?, ¿por qué?

### REAFIRMO Y ORDENO

Muchas veces la sensibilidad a la inmediatez nos lleva a tomar decisiones apresuradas que no nos permiten reflexionar y profundizar si nos estamos desviando de nuestras metas, y del respeto a nosotros mismos y a los demás. La buena noticia es que puedes poner en práctica estrategias de regulación emocional para pausar, analizar la situación y así poder elegir de manera responsable sobre tus actos, actitudes y comportamientos.

### ESCRIBE EN UN MINUTO QUÉ TE LLEVAS DE LA LECCIÓN